第 8 章　点的合成运动

8.1 基本知识点

8.1.1 三个对象与三种运动

点的合成运动研究点相对不同参考系运动之间的关系。

1）三个对象

研究的对象称为**动点**；

第一个参考系称为固定参考系，简称**定系**；

第二个参考系称为动参考系，简称**动系**。

三者必须在三个不同的物体之上。

2）三种运动

绝对运动——动点相对于定系的运动；

相对运动——动点相对于动系的运动；

牵连运动——动系相对于定系的运动。

必须指出：动点的绝对运动和相对运动都属于点的运动，可能是直线运动或曲线运动；而牵连运动则属于刚体的运动，可能是平动、转动或其他较复杂的刚体运动形式。

8.1.2 三种速度和加速度

动点的**相对速度**（$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$）和**相对加速度**（$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$）是指动点相对于动系的运动的速度和加速度。

动点的**绝对速度**（$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$）和**绝对加速度**（$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$）是指动点相对于定系的运动的速度和加速度。

牵连点是指某瞬时与动点相重合的，在动系上的点。由于动点有相对运动，故不同瞬时有不同的牵连点。

牵连点相对定系的速度、加速度分别称为动点的**牵连速度**和**牵连加速度。**

8.1.3 速度合成定理

动点在某瞬时的绝对速度等于其在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

8.1.4 加速度合成定理

1）牵连运动为平动时的加速度合成定理

动系作平动时，动点的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。其表达式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

2）牵连运动为转动时的加速度合成定理

当动系作转动时，加速度合成定理（或称科里奥利定理）为动点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度与科氏加速度三者的矢量和。其表达式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$$

当相对速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 在 ω 的转动平面内时，科氏加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ 可由以下简单方法确定。

大小：$a_{\mathrm{c}}= 2\omega \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

方向：由 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 顺 ω 转过 90°

8.2 重点及难点

8.2.1 重点

1）点的合成运动基本概念，明确三个对象及三种运动。

2）速度合成定理及牵连运动为平动时的加速度合成定理应用。

8.2.2 难点

1）动点，动系的正确选择，正确判定动点的相对运动。

2）牵连点的概念，动点的牵连速度、牵连加速度以及科氏加速度的概念。

8.3 学习指导

8.3.1 基本要求

1）深刻理解三种运动、三种速度和三种加速度的定义，运动的合成与分解，以及运动相对性的概念。

2）对具体问题能够恰当地选择动点、动系和定系，进行运动轨迹、速度和加速度分析。并能正确计算科氏加速度的大小并确定它的方向。

3）熟练地应用速度合成定理、牵连运动为平动时点的加速度合成定理

8.3.2 解题指导

1）根据所给题目如何确定是否需用点的合成运动方法

当动点（或刚体上一点）与另一个运动物体（动参考系）之间有相对运动时，才能将动点的绝对运动分解为随动系的牵连运动和相对于动系的相对运动。反过来，动点的相对运动与牵连运动就合成为动点的绝对运动。这样就构成了点的合成运动问题。

2）动点，动系和定系选取原则

（1）动点，动系和定系必须分别取在三个物体（包括点）上，定系一般固定在不动的物体上。动点与动系需根据分析问题的需要，合理进行选取。但动点和动系不能同时固连在同一个运动刚体上，否则动点与动系之间就不会有相对运动，也就不能构成点的合成运动。

（2）动点相对于动系的相对运动轨迹要明显，简单（比如轨迹是直线、圆或某一确定的曲线），并且动参考系要有明确的运动（比如平动、定轴转动或其他运动等）。

对于有约束联系的问题，例如机构传动或一个点在另一个运动着的物体上运动。对于机构传动，动点多选在机构的主动件与从动件的联接点和接触点，且一旦选定某构件上一点为动点时，则动系必须固结在另一个构件上；对于一个点在另一个运动着的物体上运动这类问题，其特点是点的相对轨迹已知，动点就选为运动的点，动系固结在运动的物体上。

3）进行运动分析

确定了动点、动系和定系后，首先要明确牵连运动的形式（平动、转动或其他运动）。然后分析动点的绝对运动轨迹、相对运动轨迹。要明确各种轨迹是直线还是曲线，若轨迹是曲线时，点的运动加速度一般就有切向加速度和法向加速度。

4）点的速度分析与合成

无论牵连运动为何种运动，速度合成定理普遍适用。解题时应先分析三种速度的大小和方向，明确哪些是未知的，并画出速度矢量图，一般只要有两个未知量，就可以根据速度矢量合成公式用几何法或投影法求解。用几何法作速度平行四边形时，绝对速度矢量一定沿平行四边形的对角线。用投影法求解时，一定是将速度矢量合成公式等号两端的各速度矢量分别向同一投影轴进行投影。

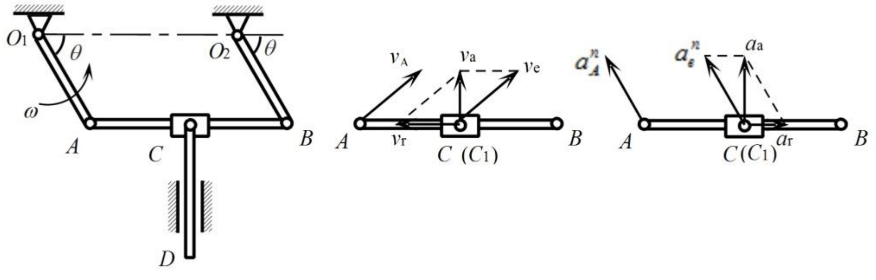
5）点的加速度分析与合成

首先要明确牵连运动是平动还是其他运动。两者区分在于牵连运动为平动时，点的加速度合成定理中不含科氏加速度。

若动点的相对轨迹与绝对轨迹为曲线，牵连运动为曲线平动时，则加速度合成定理中的各项加速度都有可能分为切向加速度和法向加速度两项。为此，加速度合成定理一般用其矢量合成公式的投影式进行求解，注意一定是将加速度矢量合成公式等号两端的各加速度分别向同一投影轴进行投影。

8.4 典型题解

例：铰接四边形机构如图 8-1（a）所示。$O_1A=O_2B=r=10$cm，且 $O_1O_2=AB$。当曲柄 O_1A 以匀角速度 $\omega=2$rad/s 绕 O_1 轴转动时，通过套在 AB 杆上的套筒 C 带动 CD 杆运动。试求图示位置 $\theta=60°$ 时，CD 杆的速度及加速度。



（a）　　　　　　（b）　　　　　　（c）

图 8-1

解法一　套筒 C 与 AB 杆的连接属于滑块滑道类型，而 AB 杆为平行四边形机构中的连杆，作平动。由已知条件，AB 杆在图示瞬时的平动速度和加速应等于 A 点的速度和加速度。因此，对套筒 C 用点的合成运动分析便于求解。

动点：套筒上 C 点

动系：固连于 AB 杆

1）运动分析

绝对运动：套筒 C 沿铅垂线 CD 的直线运动；

相对运动：套筒 C 沿 AB 杆的直线运动；

牵连运动：平动

2）速度分析

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

大小：?　√　?

方位：√　√　√

牵连速度　$v_e = v_A = r\omega = 20\ \mathrm{cm/s}$

作速度平行四边形，如图 8-1（b），得

$$v_{\mathrm{a}} = v_e \cos\theta = 10\ \mathrm{cm/s}$$

这就是 CD 杆平动的速度，方向铅垂向上。

3）加速度分析

按运动分析，平动刚体 AB 上 C_1 点的加速度有切向和法向加速度，因为 $a_A^{\tau} = 0$，所以 $a_e^{\tau} = 0$。

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{n} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

大小：?　√　?

方位：√　√　√

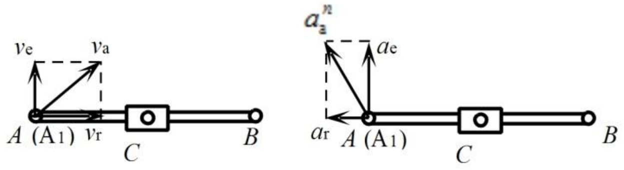
$$a_{\mathrm{e}}^{n} = a_A^{n} = r\omega^2 = 40\ \mathrm{cm/s^2}$$

作加速度平行四边形如图 8-1（c），得

$$a_a = a_e \sin 60^{\circ} = 34.6\ \mathrm{cm/s^2}$$

这就是 CD 杆平动的加速度，方向铅垂向上。

解法二　由结构特点，AB 杆相对于 CD 杆是沿套筒轴线作平动，即 A 铰链相对于 CD 杆作直线运动。A 点的速度和加速度由已知条件可得。因此，对 A 点用点的合成运动分析，同样可解本题。



（a）　　　　　　　　　（b）

图 8-2

动点：A 点

动系：固连于 CD 杆

1）运动分析

绝对运动：以 O_1 为圆心，O_1A 为半径的圆周运动；

相对运动：沿 AB 的直线运动；

牵连运动：平动，各点的轨迹沿铅垂的直线。

2）速度分析

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

大小：√　?　?

方位：√　√　√

绝对速度为

$$v_{\mathrm{a}} = v_A = r\omega = 20\ \mathrm{cm/s}$$

作速度平行四边形，如图 8-2（a），得

$$v_e = v_a \cos\theta = 10\ \mathrm{cm/s}$$

这就是 CD 杆平动的速度，方向铅垂向上。

3）加速度分析

动点的绝对加速度只有法向分量

$$a_a^n = r\omega^2 = 40\ \mathrm{cm/s^2}$$

如 8-2（b）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^n = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

大小：√　?　?

方位：√　√　√

作加速度平行四边形如图 8-2（b），得

$$a_{\mathrm{e}} = a_{\mathrm{a}}^n \sin\theta = 34.6\ \mathrm{cm/s^2}$$

这就是 CD 杆平动的加速度，方向铅垂向上。

小结：

通过本题分析可见，适当选取动点和动系，是应用点的合成运动方法解题的关键，选取合适，可以方便地求解。

动系固连于 AB 杆时，注意牵连运动是平动。AB 杆上各点的运动情况与 A 点完全相同，各点轨迹为圆周，该瞬时各点有相同的速度和加速度。因此，牵连点 C_1 点的速度和加速度完全可由 A 点得出。

本题易犯的错误是：

①将 AB 杆的运动误认为作转动，这是对平动的判定标准掌握不清楚引起的。

②取套筒 C 点为动点，动系取作平行四边形机构 O_1O_2BA，该机构是由四个杆组成的，各杆运动不同，牵连运动将无法分析。因此，动系只能固连于一个运动物体。

③取套筒 C 为动点，动系固连于 O_1A 杆。这样，动系的牵连运动是绕 O_1 轴的转动，动点的相对运动是未确定的曲线运动，未知量多，无法继续求解。如果误认为动点的相对运动是沿 AB 的直线运动，这种判断也是错误的。