

第 6 章 运动学基础

6.1 基本知识点

6.1.1 描述点的运动

确定点在所选参考（坐标）系中每一瞬时的位置，即点的运动规律。用数学式表示，称为运动方程。常用的方法有

1) 矢量法

点的位置可由位置矢量 \mathbf{r} 唯一确定，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

称为点的矢量形式的运动方程。

2) 直角坐标法

点的位置也可以用一组直角坐标 x, y, z 唯一确定，即

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

称为点的直角坐标形式的运动方程。

3) 自然法

当动点相对于所选参考系的运动轨迹已知时，可以沿此轨迹来确定动点的位置。在轨迹上取定点 O 为原点，并规定轨迹的正方向，则动点的位置就可以用弧坐标 s 来确定。运动方程表达为

$$s = s(t)$$

还可以用其他方法，例如极坐标法，球坐标法等来确定点的位置。消去运动方程中的时间 t 之后，就得到点的轨迹方程。

6.1.2 点的速度和加速度

1) 矢量法

速度是动点的矢径对时间的一阶导数，表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

加速度是动点速度对时间的一阶导数或矢径对时间的二阶导数，表示为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

2) 直角坐标法

速度分析式为

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

速度在坐标轴上的投影为动点的各对应坐标对时间的一阶导数, 即

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

由此可以求得速度的大小和方向余弦。

加速度分析式为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

加速度在坐标轴的投影为动点的速度在相应坐标轴上的投影对时间的一阶导数, 或动点的各对应坐标对时间的二阶导数, 即

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

由此可以得到加速度的大小和方向余弦。

3) 自然法

速度在切线轴上的投影等于弧坐标对时间的一阶导数, 即

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}$$

加速度沿自然坐标轴的分析式为

$$\mathbf{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}$$

加速度在切线、主法线和副法线上的投影分别为

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad a_b = 0$$

全加速度的大小和方向可由下式确定

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \tan \theta = \frac{|a_\tau|}{a_n}$$

切向加速度和法向加速度的物理意义:

切向加速度: $\mathbf{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau}$, 表示点的速度大小随时间的变化率;

法向加速度: $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}$, 表示点的速度方向随时间的变化率。

6.1.3 刚体的基本运动

1) 刚体的平动

刚体在运动过程中, 相对某参考系若其上任意直线始终与它的初始位置平行, 则称刚体(相对该参考系)作平行移动, 简称为平动。

当刚体作平动时, 刚体内各点的轨迹形状完全相同而且互相平行; 在每一瞬时, 各点具有相同的速度和相同的加速度。因此, 对刚体平动的研究可以归结为点的运动的研究。

2) 刚体绕定轴转动

刚体运动时, 相对于某参考系, 刚体内(或其延拓部分)有一条直线保持不动, 则称此刚体相对于此参考系作定轴转动, 简称为转动。该不动的直线称为转轴。

(1) 刚体的整体运动

以 φ 表示刚体的角位移或转角, 则转动方程

$$\varphi = \varphi(t)$$

角速度为

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

(2) 转动刚体内任意一点的运动、速度和加速度

在刚体内任取一点, 其与转轴间的距离为 R , 则该点以 R 为半径作圆周运动, 圆心在转轴上。

该点的速度为

$$v = R\omega$$

切向加速度和法向加速度分别为 $a_\tau = R\alpha$, $a_n = R\omega^2$

因此, 该点的全加速度大小和方向分别为

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}, \quad \tan\theta = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

转动刚体内各点的速度和加速度分布规律为: 在每一瞬时, 转动刚体内各点的速度和加速度大小分别与这些点到转动轴的距离成正比, 各点的速度与其转动半径垂直, 各点的加速度与各点转动半径之间的夹角 θ 都相同。

6.2 重点及难点

6.2.1 重点

1) 用直角坐标法描述点的运动(运动方程、速度、加速度)。

2) 用自然法描述点的平面曲线运动(点沿已知轨迹的运动方程、速度、切向加速度、法向加速度)。

3) 刚体的平动及其运动特征。

4) 刚体的定轴转动,转动方程、角速度及角加速度。

5) 转动刚体内各点的速度及加速度。

6.2.2 难点

1) 密切面及自然轴系的概念。

2) 正确判别刚体的基本运动形式。

6.3 学习指导

6.3.1 基本要求

1) 能用矢量法建立点的运动方程,求解速度和加速度。

2) 能熟练应用直角坐标法建立点的运动方程,求轨迹、速度和加速度。

3) 能熟练应用自然法求点在平面上作曲线运动时的运动方程、速度和加速度,并正确理解切向加速度和法向加速度的物理意义。

4) 明确刚体作基本运动的具体特征,并根据刚体基本运动的特征能正确判断刚体作基本运动的具体形式。

5) 能熟练计算基本运动刚体上任一点的运动轨迹、速度和加速度。

6) 掌握传动比的概念及其公式的应用。

6.3.2 解题指导

1) 点的运动描述

点的运动轨迹未知情况下,一般选用直角坐标法;点的运动轨迹已知情况下,一般选用自然法,亦可选用直角坐标法。

建立运动方程的具体步骤如下:

(1) 确定研究对象,即确定所要研究的动点或刚体上一点。

(2) 根据所选用的方法,选择对应的坐标系,并要明确坐标系是固定在什么物体上。

(3) 确定点的运动的开始位置,然后将动点放在任意位置,用某一参量表示点的位置,所选参量应与时间有关。不能将点放在特殊位置(如初、末位置),因为特定时刻的位置不能代表点的位置随时间变化的函数关系。

(4) 代入时间 t 找出坐标与时间 t 的函数关系,就得到动点在空间的几何随时间 t 的变化关系,亦即动点相对于坐标的运动规律——运动方程。

求点的轨迹方程方法如下:

先建立以直角坐标表示的点的运动方程,将方程中的时间 t 消去,得到动点的空间坐标之间的函数关系,就是动点的轨迹方程。

求点的速度、加速度方法如下:

建立运动方程后, 根据已知量和需求量, 可用数学求导法、矢量合成法则以及法向加速度公式 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, 求得动点的速度、切向加速度、法向加速度以及全加速度。

2) 刚体基本运动的描述

刚体的运动为平动, 则刚体的运动可用刚体上某一点的运动来代表, 这样, 就可以用点的运动求解方法来求刚体的运动。

刚体的运动为定轴转动, 常见的解题类型和求解方法如下:

(1) 已知刚体的运动规律 (包括自行建立的方程), 求角速度和角加速度, 需用数学求导法则来解决; 反之, 已知刚体转动的角加速度和初始条件, 求刚体转动的角速度或转动方程, 可根据数学积分运算求解。

(2) 已知刚体的转动规律, 角速度或角加速度 (包括自行求出的), 求刚体上某点的速度和加速度; 反过来, 已知刚体上某一点的速度或加速度, 求刚体转动的角速度或角加速度, 可根据公式求解。

3) 刚体系统的运动描述方法

首先判明每个刚体是作平动还是定轴转动。再从已知刚体的运动, 求与它连接的另一刚体的运动。需根据两个刚体接触点 (传递点) 的速度或切向加速度相等的原则, 依次按照“刚体—传递点—刚体”的程序求解。即从已知的转动刚体的运动, 求传递点的速度、加速度, 再求另一个转动刚体的运动。

若轮系可直接应用传动比公式。

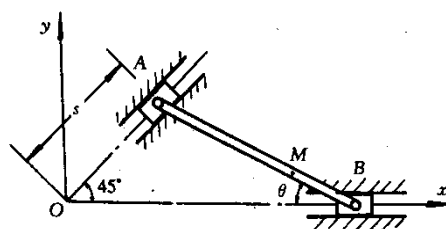


图 6-1

6.4 典型题解

例 6-1 AB 杆两端与滑块以铰链连接, 滑块可在各自的滑道中滑动, 如图 6-1 所示。

已知杆长 $l=60\text{cm}$, $MB = \frac{l}{3} = 20\text{cm}$, 滑块 A 的运动规律为 $s = 60\sqrt{2} \sin 2\pi t$ (s 以 cm 计,

t 以 s 计)。试求: (1) 点 M 的运动方程;

(2) 当 $t = \frac{1}{12}s$ 时, 点 M 的速度。

解: 为建立 M 点的运动方程, 可先写出 M 点的坐标 x 、 y 与 θ 角的关系, 而 θ 与 s 有关系, 这样就得出 M 点坐标与时间 t 的关系式, 即运动方程。

(1) M 点的坐标

$$\begin{aligned} x &= s \sin 45^\circ + \overline{AM} \cos \theta = 60 \sin 2\pi t + 40 \cos \theta \\ y &= \overline{MB} \sin \theta = 20 \sin \theta \end{aligned}$$

由 $\triangle OAB$ 得

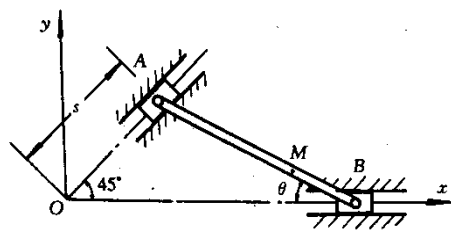


图 6-1

$$\sin \theta = \frac{s}{AB} \sin 45^\circ = \sin 2\pi t, \quad \theta = 2\pi t$$

得 M 点的运动方程为

$$x = 60 \sin 2\pi t + 40 \cos 2\pi t$$

$$y = 20 \sin 2\pi t$$

(2) M 点的速度在 x, y 轴上的投影为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 120\pi \cos 2\pi t - 80\pi \sin 2\pi t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 40\pi \cos 2\pi t$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{12} \text{ s 时, } v_x = 120\pi \cos \frac{\pi}{6} - 80\pi \sin \frac{\pi}{6} = 200.4 \text{ cm/s}$$

$$v_y = 40\pi \cos \frac{\pi}{6} = 108.7 \text{ cm/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 228 \text{ cm/s}$$

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v} = 0.8789, \quad \varphi = 28.48^\circ$$

小结：点的运动方程是建立点的坐标与时间的关系，有时需要利用中间变量，本题的 θ 角就是起到这样的作用。

例 6-2 机构如图 6-2 (a) 所示。曲柄 O_1A 绕 O_1 轴转动，通过固连于连杆 AB 上的齿轮 2 带动齿轮 1 绕 C 轴转动。已知： O_1A 的角速度 ω 为常量， $O_1A = O_2B = 2r$ ，且 $O_1A \parallel O_2B$ 。两齿轮半径均为 r 。试求齿轮 2 和齿轮 1 分别在接触点 P 的速度和加速度。

解：由结构特点，首先判定 AB 杆（连同齿轮 2）作平动，平动刚体上 A 点的运动就是齿轮 2 上 P 点的运动。然后根据齿轮啮合关系，得到齿轮 1 的运动，进一步可求出 P 点的速度和加速度。

连杆 AB （连同齿轮 2）作平动，因此齿轮 2 上 P 点的速度和加速度分别为

$$v_2 = v_A = 2r\omega \quad \text{方向如图 6-2 (b) 所示。}$$

$$a_2 = a_A^n = 2r\omega^2$$

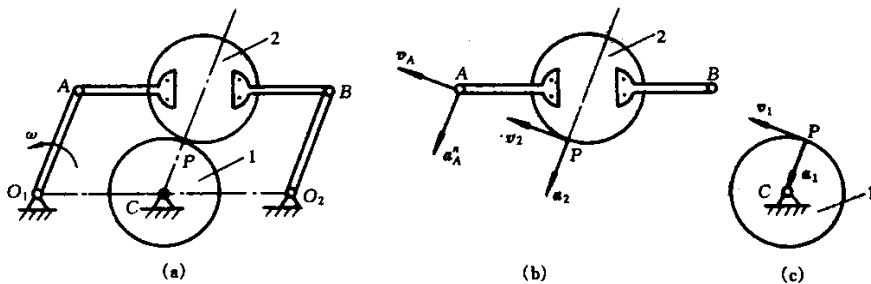


图 6-2

齿轮 1 作匀角速转动，由于啮合点的速度相同，齿轮 1 上 P 点的速度为

$$v_1 = v_2 = 2r\omega \text{ 方向与 } v_2 \text{ 相同}$$

P 点只有法向加速度，即

$$a_1 = a_1^n = \frac{v_1^2}{r} = 4r\omega^2 \text{ 方向沿 } PC \text{ 指向轮心 } C \text{ 点，如图 6-2 (c)。$$

小结：本题判定 AB 杆（连同齿轮 2）作平动是关键，只有掌握平动的定义，才能做出正确的判断。

掌握齿轮啮合传递运动的特点。由于齿轮啮合的接触点无相对滑动，因此两轮在啮合点的速度相同，这样，就从一个刚体的运动求得另一刚体的运动。

齿轮 2 和齿轮 1 分别作平动和定轴转动，因此应按刚体的不同运动特征分别计算接触点 P 的速度和加速度。