第 10 章　质点系动量定理

10.1 基本知识点

10.1.1 动量

1）质点的动量：质点质量与速度的乘积 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$。

2）质点系的动量：质点系内各质点动量的矢量和 $\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$

质点系的动量等于质心的动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_c$。

质点系的动量等于各部分质心的动量矢量和 $\boldsymbol{p}=\sum m_I\boldsymbol{v}_{IC}$

10.1.2 质心坐标公式

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

其中，m 为质点系总质量。在地球引力场中，质点系的质心与重心重合。

10.1.3 质点系动量定理

微分形式：质点系的动量对时间的一阶导数等于作用于质点系外力的矢量和，即

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\sum \boldsymbol{F}_i^e$$

积分形式：质点系动量的变化等于外力冲量的矢量和，即

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum \boldsymbol{I}^e$$

通常在具体计算中，常用动量定理的投影式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,p_x}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_x^e\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\,p_y}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_y^e\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\,p_z}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_z^e\end{cases}$$

当 $\sum \boldsymbol{F}^e=0$ 时，动量 $\boldsymbol{p}$ 为常矢量，即运动过程中，如果质点系外力矢量和始终为零，则质点系动量保持为常矢量。

当 $\sum F_x{}^e = 0$ 时，动量 p_x 为常量，即运动过程中，如果质点系外力在 x 轴上的投影的代数和始终为零，则质点系动量在该轴的投影保持为常量。

10.1.4 质心运动定理

质点系的总质量与质心加速度的乘积，等于作用于质点系外力的矢量和，即

$$m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}^e$$

质心运动定理在直角坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \sum F_x{}^e \\ ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \sum F_y^e \\ ma_{Cz} = m\ddot{z}_C = \sum F_z^e \end{cases}$$

在自然坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} ma_{C\tau} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_\tau{}^e \\ ma_{Cn} = m\dfrac{v_C^2}{\rho} = \sum F_n^e \\ 0 = \sum F_b^e \end{cases}$$

当 $\sum \boldsymbol{F}^e = 0$ 时，$\boldsymbol{a}_C = 0$，$\boldsymbol{v}_C$ 为常矢量，即在质点系运动过程中，若外力矢量和始终为零，则质点系质心速度不变，若质心初速度 $\boldsymbol{v}_{C0} = 0$，则质心运动守恒。

当 $\sum F_x{}^e = 0$ 时，$a_{Cx} = 0$，v_{Cx} 为常量，若 $v_{Cx0} = 0$，则 x_C 为常量，称为质心 x 坐标守恒。

10.1.5 流体附加动压力

由质点系动量定理推导得到管道中流体附加动压力的计算公式为

$$\boldsymbol{F}'' = q_v \rho (\boldsymbol{v}_b - \boldsymbol{v}_a)$$

注意，式中的力及速度均为矢量。平常应用其投影形式。

10.2 重点及难点

10.2.1 重点

质点系动量定理及质心运动定理。

10.2.2 难点

求解流体对管道的附加动压力。

10.3 学习指导

10.3.1 基本要求

1）对质点系的质心、动量等概念有清晰的理解，能熟练地计算质点系的质心位置和动量。
2）能熟练地应用动量定理、质心运动定理求解动力学问题。
3）掌握流体对管道附加动压力的及计算公式及其应用。

10.3.2 解题步骤

应用质点动力学基本定理解题的步骤如下：

1） 选取研究对象。根据题意，适当选择与待求量和已知条件有关的质点系为研究对象。

2） 分析受力，画出受力图（其方法与静力学相同）。

3） 分析运动。用运动学的方法来分析质点系的运动，明确已知及未知条件。

4） 选择定理与建立方程。

质点系动力学的基本定理建立了质点系运动量的变化和作用量之间的关系。它所求解的问题大致分为两类基本问题：

（1）已知运动，求力（或力的作用量）。

（2）已知力，求运动。

也有一些综合问题，第一类和第二类基本问题相互交叉在一起，这时要把它分解成两类基本问题，依次求解。

在分析受力和运动以后，先分清是哪类问题，然后选择定理，在建立方程。以导数表示的运动特征量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$等，在列方程时一律设为正值。

5） 解方程。

有些问题在得到解后，还要进一步讨论力学意义。

10.4 典型题解

例：如图 10-1，小平车重量 G_1=2kN，车上有一装着砂子的箱子，重量为 G_2=1kN，小车沿水平轨道以匀速率 v_0=3.5km/h 行驶。今有一重量 G_3=0.5kN 的物体铅垂落入砂箱，求此后小车的速度。

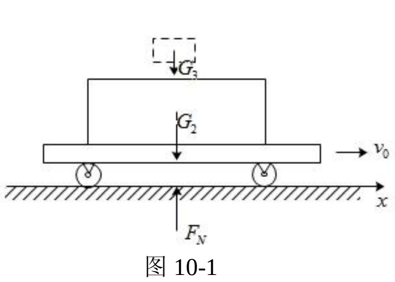

图 10-1

解： 题目是已知系统的初始动量，且水平方向外力为零，故可用动量守恒求末动量，进而求出速度。

研究对象：小车，砂箱和重物所组成的系统

受力分析：系统受到重力 G_1，G_2，G_3 和地面约束反力 F_N 的作用，如图所示，均为铅垂方向的力，$\sum F_x^e = 0$，因此系统水平方向动量守恒。

运动分析：重物落入砂箱前后，系统都作平动。设系统运动稳定后的速度为 v，则系统初始和终了的动量分别为

$$p_{x0}=\frac{G_1+G_2}{g}v_0, \qquad p_x=\frac{G_1+G_2+G_3}{g}v$$

由动量守恒 $p_{x0}=p_x$ 得

$$\frac{G_1+G_2}{g}v_0=\frac{G_1+G_2+G_3}{g}v$$

求得小车速度为

$$v=\frac{G_1+G_2}{G_1+G_2+G_3}v_0=3\text{km/h}=0.833\text{m/s}$$