

## 第 4 章 力系的平衡

### 4.1 基本知识点

#### 4.1.1 基本概念

- 1) 刚体系统——由多个刚体连接而成的系统。
- 2) 刚体系统平衡——组成该系统的每个刚体都处于平衡状态。
- 3) 系统外力——系统以外的物体作用于系统上的力。
- 4) 系统内力——组成系统的各刚体间相互作用的力。
- 5) 静定问题——未知量个数等于独立的平衡方程个数。
- 6) 静不定问题——未知量个数大于独立的平衡方程个数。

#### 4.1.2 基本定理及理论

##### 1) 空间力系的平衡方程

空间力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和对任一点  $O$  的主矩分别为零。

空间力系的平衡方程

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_z(\mathbf{F}) &= 0\end{aligned}$$

空间一般力系具有 6 个独立的平衡方程，即可以求解 6 个未知量。

##### 2) 空间平行力系的平衡方程

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0\end{aligned}$$

空间平行力系具有 3 个独立的平衡方程。

##### 3) 平面力系的合成结果

平面任意力系的合成结果如表 4-1

表 4-1 平面任意力系的合成结果

力系的主矢和主矩		合成结果	说明
$F'_R \neq 0$	$M_O = 0$	合力	原力系合成为一个合力，合力作用线过简化中心
	$M_O \neq 0$		合成为一个合力，作用线偏离简化中心的距离 $d = M_O/F'_R$
$F'_R = 0$	$M_O \neq 0$	合力偶	原力系合成为一个力偶，此时，主矩与简化中心无关
	$M_O = 0$	平衡	原力系处于平衡

#### 4) 平面任意力系的平衡条件及平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：力系的主矢和对任意点的主矩均为零，即

$$F'_R = 0, M_O = 0$$

其平衡方程的有三种表达形式

$$\text{基本形式} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$$

$$\text{二矩式} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases} \quad \text{附加条件：} x \text{ 轴不垂直于 } A, B \text{ 连线}$$

$$\text{三矩式} \begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \\ \sum M_C(F) = 0 \end{cases} \quad \text{附加条件：} A, B, C \text{ 三点不共线}$$

#### 5) 平面平行力系的平衡方程

各力作用线都处在同一个平面内且相互平行的力系称为平面平行力系。平面平行力系的平衡方程有两种形式：

$$\text{基本形式} \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \end{cases}$$

$$\text{二矩式} \begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases} \quad \text{方程彼此独立的条件：} A, B \text{ 两点连线不与力平行}$$

### 4.1.3 平面桁架

## 1) 平面桁架的基本概念

(1) **平面桁架**——各杆件轴线都在同一平面内的桁架。

(2) **空间桁架**——各杆件轴线不在同一平面内的桁架。

(3) **理想桁架**——满足以下假设的桁架。

- ①杆件两端都用理想铰链连接；
- ②每根杆件的轴线是一条直线；
- ③所有杆件的轴线必须相交于理想铰链的几何中心；
- ④各杆件自重不计，外载荷必须作用于桁架的节点。

## 2) 求解平面桁架内力的方法

(1) **节点法**：以桁架中的节点为研究对象，通过平面汇交力系的平衡条件求解。

(2) **截面法**：选择一平面，在合适的部位假想将桁架截成两部分，取其中一部分为研究对象，通过平面一般力系的平衡条件求出被截杆件的内力。

## 4.2 重点及难点

### 4.2.1 重点

- 1) 对于平面任意力系，正确应用各种形式的平衡方程。
- 2) 空间力系平衡问题的分析与求解。
- 3) 刚体及刚体系统平衡问题的求解。

### 4.2.2 难点

- 1) 刚体系统平衡问题的求解。
- 2) 空间力系的受力分析及平衡求解。

## 4.3 学习指导

### 4.3.1 基本要求

- 1) 能应用平衡条件求解空间任意力系的平衡问题。
- 2) 能熟练地计算在平面力系作用下的单个物体和简单物体系统的平衡问题。
- 3) 了解静定与静不定概念。
- 4) 掌握平面简单桁架内力计算的两种方法。

### 4.3.2 解题步骤

## 1) 平面任意力系平衡问题的解题步骤

### (1) 刚体的平衡问题

单个刚体的平衡问题解题的一般步骤是，选取研究对象，画出受力图，列平衡方程，进行求解。

### (2) 刚体系统的平衡问题

①选取研究对象。可以先以整体为研究对象进行分析，再拆开系统，取出系统中某一个刚体或几个刚体为研究对象，求出待求的未知力。

②进行受力分析，画出受力图。取部分进行研究时，要注意各物体间相互的作用力与反作用力的关系。

③列平衡方程。所列方程尽可能做到一个方程只包含一个未知量，所选取的坐标轴尽可能与较多的未知力垂直，矩心尽量选取在较多未知力的交点上。

④求解方程。若计算结果为正，说明力的方向与假设方向相同，若为负，则与假设方向相反，用它带入其他方程求解时，负号应一并代入。

## 2) 空间力系问题的解题步骤

空间力系的平衡问题一般应用平衡方程求解，选好研究对象与建立合适的坐标系是顺利求解的关键。

(1) 选取研究对象，正确作出受力分析，受力图要有清晰的空间形象，尤其要弄清力与坐标轴之间的空间几何关系。

(2) 建立合适的坐标系，为了使平衡方程简洁，建立坐标系时，力投影轴要尽可能与多数未知力垂直，矩轴应尽量与未知力的作用线共面。

(3) 列平衡方程。

(4) 求解方程。

## 3) 平面简单桁架内力计算的步骤

(1) 明确研究对象，分别画出各自的受力图。

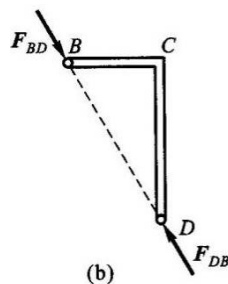
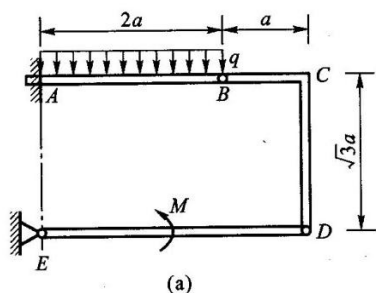
(2) 认真观察受力图中力系的种类，建立恰当的坐标系。

(3) 列出平衡方程式。

(4) 求解方程。

## 4.4 典型题解

**例** 图 4-1 (a) 所示平面构架中， $A$  处为固定端， $E$  为固定铰支座，杆  $AB$ ， $ED$  与直角杆  $BCD$  铰接。已知  $AB$  杆受均布载荷  $q$  作用，杆  $ED$  受力偶矩  $M$  的作用。若杆的重量及摩擦不计。求  $A$ ， $E$  处的约束力。



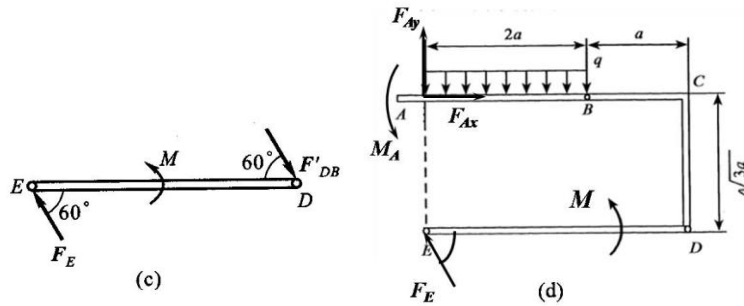


图 4-1

**求解思路：**对于系统的平衡问题，当需要求解系统外力时，一般应首先取整体为研究对象，本题的整体受力图如图 4-1 (d) 所示，由链杆约束及力偶平衡得到  $E$  处约束力方向。由图 4-1 (d) 可知未知数有 4 个，多于平面任意力系可列的独立方程个数 (3 个)。因此，需要再选取部分进行研究。求解此题目的关键要能判断出  $BCD$  是二力杆，这样才能正确求解。

**解：**(1) 如图 4-1 (b) 所示，直角杆  $BCD$  是二力杆

$$F_{BD} = F_{DB}$$

(2) 研究  $ED$  杆，由于力偶只能与力偶平衡，因此受力如图 4-1 (c) 所示

$$\sum M_D(\vec{F}) = 0: M - F_E \cdot 3a \sin 60^\circ = 0$$

求得：

$$F_E = \frac{2\sqrt{3}}{9a} M$$

(3) 研究整体，受力如图 4-1 (d) 所示

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0 \quad M_A - 2aq \cdot a + M - F_E \cos 60^\circ \cdot \sqrt{3}a = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_E \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - 2aq + F_E \sin 60^\circ = 0$$

由以上三个方程依次求得：

$$M_A = 2qa^2 - \frac{2}{3}M, \quad F_{Ax} = \frac{\sqrt{3}M}{9a}, \quad F_{Ay} = 2qa - \frac{M}{3a}$$