第 7 章　刚体平面运动

7.1 基本知识点

7.1.1 刚体平面基本概念

1） 刚体运动时，若其上各点至某个固定平面(此固定平面固连于某个坐标系之内)间的距离保持不变，则称此刚体(相对于固定平面所属的坐标系)作平面运动。

2)刚体的平面运动被简化为平面图形(此图形的平面与固定平面相平行)在它自身平面内的运动来研究。

3）为了确定平面图形 S 的位置，在平面 L 上取固定坐标系 Oxy，在平面图形上任取一点 O'，称为基点，通过该点再取一直线段 $O'A$。显然，图形 S 的位置将随直线段 $O'A$ 的位置确定而定。如图 7-1 所示，确定线段 $O'A$ 的位置至少需要 3 个参量（$x_{O'}$、$y_{O'}, \varphi$）。

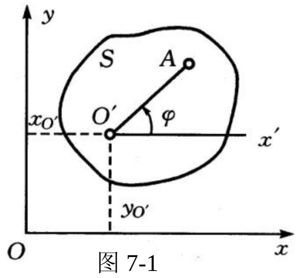


图 7-1

7.1.2 平面运动分解为平动和转动

1）平动坐标系

在平面图形上任选一点 A(称为基点)，以此为原点作平动坐标系 $Ax'y'$ 随基点 A 作平动。

2）平面运动的分解

平动的情况取决于所选的基点，所以平面运动的平动部分与基点选择有关。转动部分的转角是相对于平动坐标系(坐标轴的方向始终保持不变)而言的，选择不同基点时，图形的转角仍然相同，故每一瞬时就有相同的角速度和角加速度，所以平面运动的转动部分与基点选择无关。因此，对平面运动的角速度和角加速度，不必指明是绕哪个基点的转动。

7.1.3 平面图形上各点的速度

1）速度合成法(基点法)

平面图形上任一点的速度等于基点的速度和该点相对于基点(严格讲，应为相对于以基点为原点的平动坐标系)的速度的矢量和。若选点 O' 为基点，则任一点 M 的速度表达式为

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{MO'}$$

2）速度投影定理

图形上任意两点的速度在此两点连线上的投影相等。设图形上 A、B 两点的速度分别为 v_A 和 v_B，则有投影表达式为

$$[\boldsymbol{v}_A]_{AB} = [\boldsymbol{v}_B]_{AB}$$

3）瞬心法

（1）速度瞬心：某一瞬时平面图形上绝对速度等于零的点，称为瞬时速度中心(简称速度心)。一般情况下，在不同瞬时图形有不同的速度瞬心，每一个瞬时只有一个速度瞬心，即速度瞬心具有瞬时性和唯一性。

（2）速度分布状况:平面图形上各点的速度分布，可以看成该瞬时图形绕速度瞬心作瞬时转动时的速度分布，因此瞬时速度中心也称瞬时转动中心。

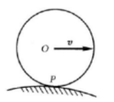
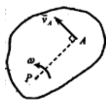
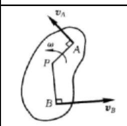
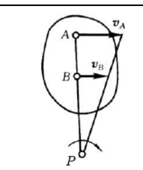
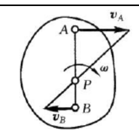
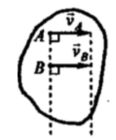
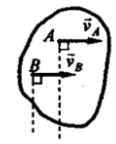
（3）确定速度瞬心的位置

速度瞬心必然位于与点的速度相垂直的直线上。当已知图形上任意两点的速度方向时，则由此两点作速度方向的垂线，两垂线的交点就是速度瞬心。

若图形上两点的速度互相平行，且与两点的连线相垂直，而大小不等，则可以用比例关系确定速度瞬心的位置。

若某时图形上两点的速度相等，图形的速度瞬心在无限远处，则此瞬时，图形上各点的速度相同。这种情况也称为瞬时平动。表 7-1 提供了确定速度瞬心的基本方法。

表 7-1 确定速度瞬心 *P* 位置的基本方法

<table>
<tr><td rowspan="3">刚体沿固定表面作纯滚动</td><td rowspan="3">已知刚体上一点的速度 v_A 和角速度 ω</td><td rowspan="3">刚体上两点的速度方向不平行</td><td colspan="4">刚体上两点的速度方向平行</td></tr>
<tr><td colspan="2">两点速度与连线垂直，大小不等</td><td colspan="2">两点速度矢量相等</td></tr>
<tr><td>两速度同向</td><td>两速度反向</td><td>与两点连线垂直</td><td>与两点连线不垂直</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
P 为刚体与固定面的接触点</td><td rowspan="2">
$PA=\frac{v_A}{\omega}$</td><td rowspan="2">
P 为两点速度垂线的交点</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">P 为两点连线与两点速度矢端连线的交点</td><td colspan="2">P 在无穷远处</td></tr>
<tr><td colspan="5">刚体绕瞬心 P 瞬时转动</td><td colspan="2">刚体瞬时平动</td></tr>
</table>

*7.1.4 平面图形上各点的加速度

平面图形上任一点的加速度，等于基点的加速度与该点相对于基点的法向加速度和切向加速度的矢量和。若选 O' 为基点，则任一点 M 的加速度表达式为

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{a}_{MO'}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{MO'}^{n}$$

平面图形上，某一瞬时绝对加速度等于零的点，称为加速度瞬时中心(简称加速度瞬心)。

注意：速度瞬心与加速度瞬心通常并不是同一点。

7.2 重点及难点

7.2.1 重点

1）明确如何把刚体平面运动分解为平动和转动。
2）求解平面图形上各点的速度。
3）对常见的平面机构能进行运动分析，求解有关速度问题。

7.2.2 难点

理解以基点为原点的平动坐标系。

7.3 学习指导

7.3.1 基本要求

1） 明确刚体平面运动的特征，掌握研究平面运动的方法（运动的合成与分解），能够正确的判断机构中作平面运动的刚体。

2） 能熟练地应用基点法、瞬心法和速度投影定理求平面图形上任一点的速度。

*3） 会应用基点法求平面图形上任一点的加速度。

7.3.2 解题指导

求解平面运动构件上一点的速度（包括构件的角速度）方法如下：

（1）从平面运动机构中的主动件开始，逐个分析机构中各构件的运动形式（平动、转动、平面运动等）。

（2）从平面运动机构中的主动件开始，根据各构件之间的相互约束方式，判断构件之间连接点的速度和加速度（包括大小和方向）。

① 当连个刚体用铰链连接时，其铰链中心处的速度与加速度是相同的。

② 当两物体的接触面有相对滑动时，相互接触的两点的速度与加速度均不相同，但其相对速度沿公切线方向。如曲柄滑块机构中的滑块与固定滑道接触并产生先对滑动，滑块速度只能沿接触点的公切线方向。

③ 当两个物体相互间作纯滚动接触时，它们相互接触的两点的瞬时速度相等，但加速度并不相同。

（3）用基点法求速度、加速度或角速度、角加速度时，通常要确定基点的速度和加速度。然后逐个分析速度或加速度矢量中其他几个要素，如果只有两个未知要素，则问题可解。如果多于两个未知要素，就需要另找补充方程。

（4）用瞬心法求速度的关键是找瞬心，再根据平面图形上某点（连接点或接触点）的已知速度求平面图形的角速度，最后求出平面图形上任何点的速度。但一定要注意，每一个平面图形有它自己的速度瞬心和角速度，不能把几个图形放在一起去找瞬心和角速度。用瞬心法求速度比较简单，尤其是计算平面图形上两个以上点的速度时更为方便。

（5）用速度投影定理求速度时，应已知图形内一点的速度的大小和方向，又知另一点速度的方位来求这一点速度的大小。这种方法多用于机构中的连杆，因为在连杆上与其他构件连接点的速度的大小或方向是容易确定的。可见，用速度投影定理求速度的大小比较方便，但不适于求平面运动刚体的角速度。

7.4 典型题解

例 曲柄连杆机构如图 7-2（a）所示，滑块 B 可在圆槽内滑动。已知:$OA=r$，$AB=l=2\sqrt{3}r$，圆弧半径 $R=2r$。在图示位置 $\varphi=60°$时，曲辆角速度为 ω，角加速度为 α，

$OA \perp AB$，且 AB 与槽在 B 点的法线夹角 $\theta=30°$ 试求：该瞬时滑块 B 的速度和 AB 杆的角速度。

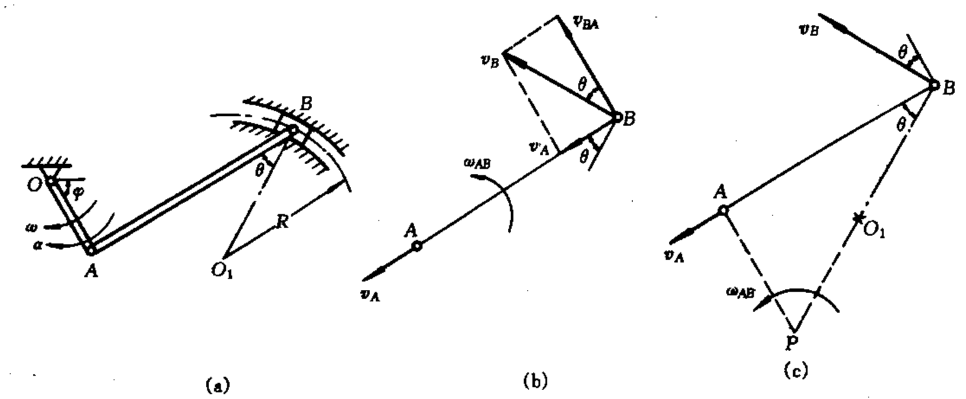


图 7-2

解: 滑块 B 与连杆 AB 由铰链连接，对这两个构件而论，连接点的运动情况完全相同，因此由连杆的速度分析，可以求得连杆 AB 的角速度和滑块 B 的速度。

连杆 AB 作平面运动，以下用不同的方法求解。

解法一 用速度合成法(基点法)求解。

取 A 为基点，B 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

大小：？ √ ？

方位：√ √ √

作速度平行四边形，如图 7-2（b）

$$v_B = \frac{v_A}{\sin\theta} = \frac{r\omega}{\sin 30^\circ} = 2r\omega$$

方向如图 7-2（b）

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\tan\theta} = \frac{r\omega}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}r\omega$$

AB 杆的角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{\sqrt{3}r\omega}{2\sqrt{3}r} = \frac{\omega}{2}$$

转向逆时针

解法二 瞬心法求解。

如图 7-2（c），分别作 A、B 两点速度的垂线得到杆 AB 的速度瞬心 P，可得 AB 杆的角速度为

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{l\tan\theta} = \frac{r\omega}{l\tan 30^\circ} = \frac{\omega}{2}$$

转向逆时针

滑块 B 的速度

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 4r \times \frac{\omega}{2} = 2r\omega$$

方向如图 7-1（c）

解法三 用速度投影法求解。

按照解法一分析的 A 点的速度，以及 B 点的速度的方位，如图 7-2（c），应用速度投影定理

$$v_B \sin\theta = v_A$$

得滑块 B 的速度 $$v_B = \frac{r\omega}{\sin 30^\circ} = 2r\omega$$

方向如图 7-1（c）

为求杆 AB 的角速度，仍需应用基点法（解法一）或瞬心法（解法二）求解。

小结：

1）比较本题的三种求解方法，可见，基点法是求解平面图形上各点速度的基本方法；瞬心法简明方便；而速度投影定理只能求解点的速度，无法求解平面图形的角速度，因此，只求速度时常用此方法。总之，对于不同问题，应选用一种便于求解的方法。

2）选用某种求解速度的方法，相应地要表达清楚。如用基点法，应写清楚选取哪一点为基点，写出矢量式，同时画出速度矢量图；如用瞬心法，应在图中画清楚速度瞬心位置；如用速度投影定理，应在图中画出速度矢量方向（或速度方位）。只有表达清楚，才可能列式计算求解。