第 2 章 基本力系

2.1 基本知识点

2.1.1 汇交力系

1）汇交力系合成的几何法及解析法

作用于刚体的汇交力系等效于共点力系，可以合成为一个合力，合力作用线通过力系的汇交点，合力的大小、方向等于力系中各力的矢量和。

2）汇交力系的平衡方程

汇交力系平衡的几何条件为力多边形自行封闭；汇交力系平衡的解析条件为各力在 x, y, z 轴上投影的代数和分别等于零。

2.1.2 力偶系

1）基本概念

（1）力偶——是由大小相等，方向相反而不共线的两个力所组成的力系。

（2）力偶矩——度量力偶对刚体的转动效应的物理量。

力偶矩矢量的三要素：矢量的模、矢量的方位、矢量的指向。
平面力偶矩的要素：力偶矩的大小、力偶矩的转向（代数量）。

（3）**两力偶等效的条件**——两力偶的力偶矩矢量相等。

2）力偶系的合成

力偶系可以合成为一合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩矢量的矢量和。

3）力偶系的平衡

力偶系平衡的充分必要条件是：合力偶矩矢量等于零。

空间力偶系 $$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

平面力偶系 $M = \sum M_i = 0$

2.2 重点及难点

2.2.1 重点

1）力偶的概念及力偶的基本性质。
2）解析法求解基本力系的平衡问题。

2.2.2 难点

力偶的等效与力偶系的平衡问题。

2.3 学习指导

1）基本要求

理解力偶的概念，深刻理解作用于刚体上的力偶性质，熟练掌握求解基本力系平衡问题的一般方法，能正确求解基本力系的平衡问题。

2）解题步骤

由于空间多边形的几何作图及几何关系较为复杂，故求解空间基本力系的平衡问题时多采用解析法。

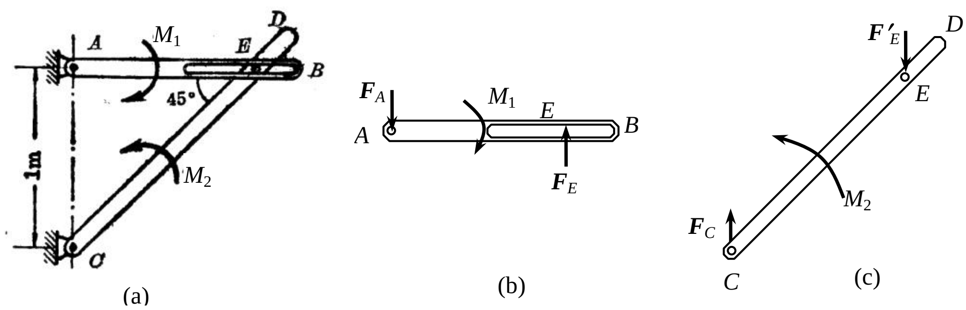
⑴ 选取研究对象：按题目要求，合理选取其中一个或某几个刚体作为研究对象。
⑵ 分析受力：分析研究对象的受力情况，画出受力图。
⑶ 根据平衡条件（几何条件或解析条件）求解。

几何法：画出封闭的力多边形，利用几何关系计算未知力的大小和方向；或按比例作图，从图中直接量出未知力。

解析法：先选取坐标轴，然后列平衡方程求解。空间基本力系独立平衡方程 3 个，可求解 3 个未知量；平面汇交力系独立平衡方程 2 个，可求解 2 个未知量；平面力偶系独立方程 1 个，可求解 1 个未知量。特别强调：平衡方程相互独立，否则无效。

2.4 典型题解

例：平面机构如图 2-1（a）所示，*AB* 杆上有一导槽，该导槽套在 *CD* 杆的销钉 *E* 上，在 *AB* 与 *CD* 杆上各有一力偶作用。已知 L=1m，M_2=500N • m，不计杆重及摩擦。试求在图示位置平衡时 M_1 的大小。



(a) (b) (c)

图 2-1

解：本题有两点要注意（1）力偶要用力偶来平衡；（2）正确分析销钉与导槽之间的约束反力。

（1）研究对象：*CD* 杆，受力分析如图 2-1（c）所示。在进行受力分析时，应先确定 *AB* 杆上 *E* 处受到销钉 *E* 的作用力方向，由于是光滑面约束，FE 应垂直于导槽。再有作用与反作用公理确定 CD 上的销钉 *E* 处的受力。确定 C 点的作用力 FC 的方向，依据力偶要用力偶来平衡的特点。由力偶系的平衡条件

$$\sum M = 0 \qquad M_2 - F_E{}' L\cos 30^\circ = 0$$

解得

$$F_E{}' = \frac{M_2}{L\cos 30^\circ}$$

（2）研究对象：*AB* 杆，受力分析如图 2-1（b）所示，同理可以依据力偶要用力偶平衡的特点确定力 FA 的方向，由力偶系平衡条件有

$$\sum M = 0 \qquad -M_1 + F_E L\cos 30^\circ = 0$$

解得

$$M_1 = F_E L\cos 30^\circ = \frac{M_2}{L\cos 30^\circ} L\cos 30^\circ = M_2 = 500\mathrm{N\cdot m}$$

第 3 章作用于刚体的力系等效简化

3.1 基本知识点

3.1.1 基本概念

1）空间力对点之矩

空间力 $\boldsymbol{F}$ 对某点 O 之矩用矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$表示，$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，指向按右手螺旋法则确定。空间力对点之矩是定位矢量，以矩心作为矢量的起点。

2）平面力对点之矩

平面力系中力 $\boldsymbol{F}$ 对该平面内的点 O 的矩，是代数量，计为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$，计算如下

$$M_O(F)=\pm Fh$$

其中，h 为矩心到力 $\boldsymbol{F}$ 作用线的垂直距离，即为力臂。规定逆时针为正。

3）空间力对轴之矩

力对轴之矩等于该力在垂直于该轴平面上的投影对轴与平面交点之矩。可表示为

$$M_z\left(\boldsymbol{F}\right)=M_O\left(\boldsymbol{F}_{xy}\right)=\pm F_{xy}\cdot h=\pm 2S_{\Delta OAB}$$

力对轴之矩是代数量，正负号按右手螺旋法则确定。

特例：力与轴平行或相交时，力对该轴的矩等于零。

4）主矢和主矩

主矢：空间力系各力的矢量和。

主矩：空间力系中各力对简化中心之矩的矢量和。

5）固定端（插入端）约束

特点：既能限制相对移动，又能限制相对转动。

约束力：可简化为一个力和一个力偶。平面问题中，用两个约束力 F_x，F_y，和一个平面约束力偶 M。

3.1.2 基本理论及定理

1）合力矩定理

力系的合力对任一点之矩等于各分力对该点之矩的矢量和。合力矩定理也可以应用于计算力对轴之矩。

2）力矩关系定理

力对点之矩矢量在经过该点的轴上的投影等于该力对该轴之矩。可用以下关系式表达

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x=M_x(\boldsymbol{F})$$
$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y=M_y(\boldsymbol{F})$$
$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z=M_z(F)$$

因此，力对点之矩的分析表达式为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i}+M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j}+M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

3）力的平移定理

作用于刚体上的力，可以等效地平移到刚体内任一指定点，但须在力与指定点所确定的平面内附加一个力偶，其力偶矩的大小、转向等于该力对指定点之矩的大小及方向。

4）空间力系向任一指定点简化的结果

空间力系向任一指定点简化，一般情况下可得到一个力和一个力偶，该力通过简化中心 O,其大小和方向等于力系的主矢 $F_R{}'$；该力偶的力偶矩矢量等于该力系对简化中心的主矩 M_O。

3.2 重点及难点

3.2.1 重点

1）力对点之矩的概念及计算。

2）力对轴之矩的概念及计算。

3.2.2 难点

1）主矢和主矩的概念。

2）空间任意力系的简化过程。

3）空间矢量的计算。

3.3 学习指导

3.3.1 基本要求

1）对于力矩应有清晰的理解。

2）掌握力矩关系定理并能熟练地计算力对点之矩和力对轴之矩。

3）掌握力系简化理论及力系简化方法。

4）了解力系的简化结果。

5）掌握固定端约束性质及其约束力的分析。

6）掌握重心坐标公式，会计算均质组合形体的重心位置坐标。

3.3.2 解题指导

1）计算平面力对点之矩常用的两种方法

（1）直接计算力臂，求力对点之矩。

（2）应用合力矩定理，求力对点之矩。

2）计算力对轴之矩常用的两种方法

（1）将力投影到垂直于轴的平面上，然后按平面上力对点的矩计算。

（2）将力沿直角坐标轴分解，然后根据合力矩定理计算。

第 4 章力系的平衡

4.1 基本知识点

4.1.1 基本概念

1）刚体系统——由多个刚体连接而成的系统。

2）刚体系统平衡——组成该系统的每个刚体都处于平衡状态。

3）系统外力——系统以外的物体作用于系统上的力。

4）系统内力——组成系统的各刚体间相互作用的力。

5）静定问题——未知量个数等于独立的平衡方程个数。

6）静不定问题——未知量个数大于独立的平衡方程个数。

4.1.2 基本定理及理论

1）空间力系的平衡方程

空间力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和对任一点 O 的主矩分别为零。

空间力系的平衡方程

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0 \\ &\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0 \\ &\sum F_z = 0 \qquad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0 \end{aligned}$$

空间一般力系具有 6 个独立的平衡方程，即可以求解 6 个未知量。

2）空间平行力系的平衡方程

$$\begin{aligned} &\sum F_z = 0 \\ &\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0 \\ &\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0 \end{aligned}$$

空间平行力系具有 3 个独立的平衡方程。

3）平面力系的合成结果

平面任意力系的合成结果如表 4-1

表 4-1 平面任意力系的合成结果

力系的主矢和主矩		合成结果	说明
$F'_R \neq 0$	$M_O = 0$	合力	原力系合成为一个合力，合力作用线过简化中心
	$M_O \neq 0$		合成为一个合力，作用线偏离简化中心的距离 $\boldsymbol{d = M_O / F'_R}$
$F'_R = 0$	$M_O \neq 0$	合力偶	原力系合成为一个力偶，此时，主矩与简化中心无关
	$M_O = 0$	平衡	原力系处于平衡

4）平面任意力系的平衡条件及平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：力系的主矢和对任意点的主矩均为零，即

$$F_R' = 0, M_O = 0$$

其平衡方程的有三种表达形式

基本形式 $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$

二矩式 $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases}$ 附加条件：x 轴不垂直于 A, B 连线

三矩式 $\begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \\ \sum M_C(F) = 0 \end{cases}$ 附加条件：A, B, C 三点不共线

5）平面平行力系的平衡方程

各力作用线都处在同一个平面内且相互平行的力系称为平面平行力系。平面平行力系的平衡方程有两种形式：

$$\begin{cases} \sum \boldsymbol{F}_y = 0 \\ \sum \boldsymbol{M}_A(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \sum \boldsymbol{M}_A(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0 \\ \sum \boldsymbol{M}_B(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0 \end{cases}$ 方程彼此独立的条件：A, B 两点连线不与力平行

4.1.3 平面桁架

1）平面桁架的基本概念

（1）平面桁架——各杆件轴线都在同一平面内的桁架。

（2）空间桁架——各杆件轴线不在同一平面内的桁架。

（3）理想桁架——满足以下假设的桁架。

①杆件两端都用理想铰链连接；

②每根杆件的轴线是一条直线；

③所有杆件的轴线必须相交于理想铰链的几何中心；

④各杆件自重不计，外载荷必须作用于桁架的节点。

2）求解平面桁架内力的方法

（1）节点法：以桁架中的节点为研究对象，通过平面汇交力系的平衡条件求解。

（2）截面法: 选择一平面，在合适的部位假想将桁架截成两部分，取其中一部分为研究对象，通过平面一般力系的平衡条件求出被截杆件的内力。

4.2 重点及难点

4.2.1 重点

1）对于平面任意力系，正确应用各种形式的平衡方程。

2）空间力系平衡问题的分析与求解。

3）刚体及刚体系统平衡问题的求解。

4.2.2 难点

1）刚体系统平衡问题的求解。

2）空间力系的受力分析及平衡求解。

4.3 学习指导

4.3.1 基本要求

1）能应用平衡条件求解空间任意力系的平衡问题。

2）能熟练地计算在平面力系作用下的单个物体和简单物体系统的平衡问题。

3）了解静定与静不定概念。

4）掌握平面简单桁架内力计算的两种方法。

4.3.2 解题步骤

1）平面任意力系平衡问题的解题步骤

（1）刚体的平衡问题

单个刚体的平衡问题解题的一般步骤是，选取研究对象，画出受力图，列平衡方程，进行求解。

（2）刚体系统的平衡问题

①选取研究对象。可以先以整体为研究对象进行分析，再拆开系统，取出系统中某一个刚体或几个刚体为研究对象，求出待求的未知力。

②进行受力分析，画出受力图。取部分进行研究时，要注意各物体间相互的作用力与反作用力的关系。

③列平衡方程。所列方程尽可能做到一个方程只包含一个未知量，所选取的坐标轴尽可能与较多的未知力垂直，矩心尽量选取在较多未知力的交点上。

④求解方程。若计算结果为正，说明力的方向与假设方向相同，若为负，则与假设方向相反，用它带入其他方程求解时，负号应一并代入。

2）空间力系问题的解题步骤

空间力系的平衡问题一般应用平衡方程求解，选好研究对象与建立合适的坐标系是顺利求解的关键。

（1）选取研究对象，正确作出受力分析，受力图要有清晰的空间形象，尤其要弄清力与坐标轴之间的空间几何关系。

（2）建立合适的坐标系，为了使平衡方程简洁，建立坐标系时，力投影轴要尽可能与多数未知力垂直，矩轴应尽量与未知力的作用线共面。

（3）列平衡方程。

（4）求解方程。

3）平面简单桁架内力计算的步骤

（1）明确研究对象，分别画出各自的受力图。

（2）认真观察受力图中力系的种类，建立恰当的坐标系。

（3）列出平衡方程式。

（4）求解方程。

4.4 典型题解

例：图 4-1（a）所示平面构架中，*A* 处为固定端，*E* 为固定铰支座，杆 *AB*，*ED* 与直角杆 *BCD* 铰接。已知 *AB* 杆受均布载荷 *q* 作用，杆 *ED* 受力偶矩 *M* 的作用。若杆的重量及摩擦不计。求 *A*，*E* 处的约束力。

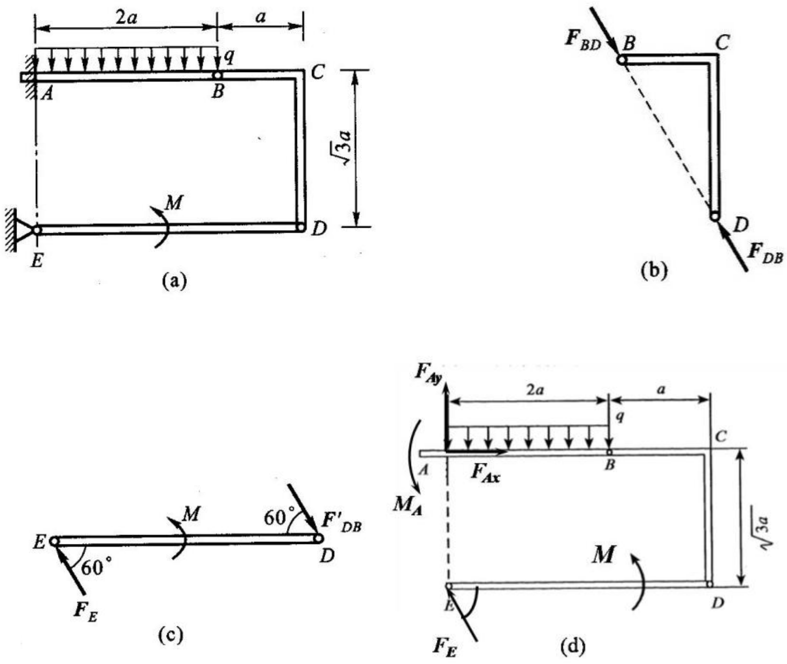


图 4-1

求解思路：对于系统的平衡问题，当需要求解系统外力时，一般应首先取整体为研究对象，本题的整体受力图如图 4-1（d）所示，由链杆约束及力偶平衡得到 *E* 处约束力方向。由图 4-1（d）可知未知数有 4 个，多于平面任意力系可列的独立方程个数（3 个）。因此，需要再选取部分进行研究。求解此题目的关键要能判断出 *BCD* 是二力杆，这样才能正确求解。

解：（1）如图 4-1（b）所示，直角杆 *BCD* 是二力杆

$F_{BD}=F_{DB}$

（2）研究 *ED* 杆，由于力偶只能与力偶平衡，因此受力如图 4-1（c）所示

$$\sum \boldsymbol{M}_D(\boldsymbol{F})=0：\ \boldsymbol{M}-\boldsymbol{F}_E\cdot 3\boldsymbol{a}\sin 60^\circ=0$$

求得：$\boldsymbol{F}_E=\dfrac{2\sqrt{3}}{9\boldsymbol{a}}\boldsymbol{M}$

（3）研究整体，受力如图 4-1（d）所示

$$\sum \boldsymbol{M}_A(\vec{\boldsymbol{F}})=0 \qquad \boldsymbol{M}_A-2\boldsymbol{aq}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{M}-\boldsymbol{F}_E\cos 60^\circ\cdot\sqrt{3}\boldsymbol{a}=0$$

$$\sum \boldsymbol{F}_x=0 \qquad \boldsymbol{F}_{Ax}-\boldsymbol{F}_E\cos 60^\circ=0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - 2aq + F_E \sin 60^\circ = 0$$

由以上三个方程依次求得：$M_A = 2qa^2 - \frac{2}{3}M$，$F_{Ax} = \frac{\sqrt{3}M}{9a}$，$F_{Ay} = 2qa - \frac{M}{3a}$

第 5 章摩擦

5.1 基本知识点

5.1.1 考虑摩擦时的平衡问题

1）滑动摩擦力

（1）静摩擦力 F_s：两物体间仅有相对滑动趋势而尚未发生滑动时的摩擦力。

大小：有一定变化范围 $0 \le F_s \le F_{\max}$

方向：与两物体间相对滑动的趋势相反。

（2）最大静滑动摩擦力（极限摩擦力）$F_{\max}$：物体处于平衡的临界状态，相对滑动即将发生时的摩擦力

大小：$F_{\max} = f_s F_N$ 式中，f_s 为静摩擦因数。

方向：与临界相对滑动的趋势相反。

（3）动摩擦力 F_d：相对滑动已经发生后的摩擦力。

大小：$F_d = f\,F_N$ 式中，f 为动摩擦因数。

2）摩擦角与自锁现象

（1）摩擦角 φ_f：当物体接触面间的静滑动摩擦力达到最大值时，全约束力与接触处公法线间的夹角称为摩擦角。摩擦角与静摩擦因数的关系为 $\tan\varphi_f = f_s$。

（2）自锁现象：当主动力的合力作用线与法线间的夹角小于摩擦角时，则不论主动力多大，物体总是处于平衡状态，即为自锁现象。

5.1.2 滚动摩阻

滚动摩阻——物体相对另一物体作滚动或有滚动趋势时所受到的阻碍作用。

1）滚动摩阻力偶矩 M_f：仅有相对滚动趋势，尚未发生滚动时的滚阻力偶的力偶矩。

大小：有一定变化范围 $0 \le M_f \le M_{\max}$

转向：与相对滚动趋势的转向相反。

2）最大滚动摩阻力偶矩 $M_{\max}$：相对滚动即将发生的临界状态时的滚阻力偶的力偶矩。

大小：$M_{\max} = \delta F_N$

转向：与相对滚动趋势的转向相反。式中，δ 为滚阻系数，单位一般为 ㎜。

5.2 重点及难点

5.2.1 重点

1）能熟练采用相应的计算方法计算平面简单桁架的内力。

2）掌握静摩擦和动摩擦的特点及性质。

3）会求解考虑摩擦时的平衡问题

5.2.2 难点

正确区分不同的考虑摩擦的平衡问题，正确判断摩擦力的方向及正确应用库伦摩擦定律。

5.3 学习指导

5.3.1 基本要求

1）能区分滑动摩擦力与极限滑动摩擦力。对滑动摩擦定律有清晰的理解。

2）能熟练计算考虑摩擦力时物体的平衡问题（解析法）。

3）理解摩擦角的概念和自锁现象。

4）了解滚摩阻的概念及滚动摩阻定律。

5.3.2 解题步骤

1）考虑摩擦时的平衡问题的求解步骤

（1）求平衡范围的问题（包括极限平衡问题）

（2）选取研究对象并画受力图。这一步还需分析摩擦力，且其方向能够确定的，必须正确画出。根据题目的要求可能存在两个极限状态，则应分别画出这两种情况的受力图。

（3）列方程。除列出平衡方程外，还需列出相应的补充方程。

（4）解方程。若补充方程是不等式方程，则求得的结果就是所要求的取值范围。若补充方程采用临界状态的等式方程，则还必须根据问题的性质分析解答平衡范围。

2）判断物体是否平衡的问题的求解步骤

（1）选取研究对象，假设物体处于平衡状态。

（2）假设物体有一定相对运动趋势，从而分析出摩擦力的方向。

（3）作出完整的受力图，列出平衡方程。

（4）求解方程，求出物体平衡时所需的摩擦力及正压力。

（5）判断物体是否平衡，即求出最大静摩擦力，并与平衡时求得摩擦力进行比较。进一步确定摩擦力的大小。

5.4 典型题解

例：图 5-1（a）中所示的均质物体重量为 P, 底面长度为 b，水平力 F 离底面的距离为 a。如果接触面间的摩擦因数为 f_s，问当力 F 逐渐增加时，物体是先滑动还是先翻倒？

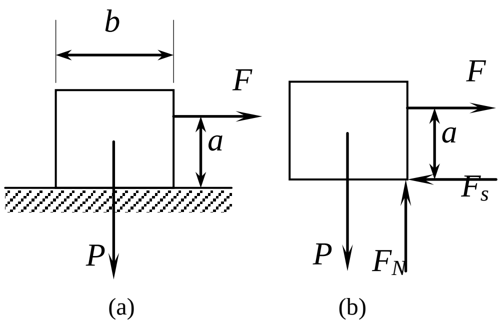


图 5-1

解：求解这类问题时，可以先假定一种情况，然后将所得结果与临界状态进行比较。

先假定物体先翻倒。当物体将翻倒时，可视为只在 A 点接触，其受力图如图 5-1（b）所示。列平衡方程

$$\sum M_A(F)=0 \qquad P\cdot\frac{b}{2}-F\cdot a=0$$

$$\sum F_x=0 \qquad F-F_s=0$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_N-P=0$$

求得，$F_s=F=\dfrac{Pb}{2a}$

接触面可能产生的最大摩擦力 $F_{\max}=f_sF_N=f_sP$。

比较 F_s 与 $F_{\max}$ 可以得到：

（1）若 $F_s<F_{\max}$，即 $f_s>\dfrac{b}{2a}$，说明物体未滑动，亦即物体先翻倒。

（2）若 $F_s>F_{\max}$，即 $f_s<\dfrac{b}{2a}$，说明物体先滑动。

（3）若 $F_s=F_{\max}$，即 $f_s=\dfrac{b}{2a}$，则将同时发生滑动和翻倒。

第 6 章运动学基础

6.1 基本知识点

6.1.1 描述点的运动

确定点在所选参考（坐标）系中每一瞬时的位置，即点的运动规律。用数学式表示，称为运动方程。常用的方法有

1）矢量法

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

称为点的矢量形式的运动方程。

2）直角坐标法点的位置也可以用一组直角坐标 x，y，z 唯一确定，即

$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t)$$

称为点的直角坐标形式的运动方程。

3）自然法当动点相对于所选参考系的运动轨迹已知时，可以沿此轨迹来确定动点的位置。在轨迹上取定点 O 为原点，并规定轨迹的正方向，则动点的位置就可以用弧坐标 s 来确定。运动方程表达为

$$s = s(t)$$

还可以用其他方法，例如极坐标法，球坐标法等来确定点的位置。

消去运动方程中的时间 t 之后，就得到点的轨迹方程。

6.1.2 点的速度和加速度

1）矢量法

速度是动点的矢径对时间的一阶导数，表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}$$

加速度是动点速度对时间的一阶导数或矢径对时间的二阶导数，表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2）直角坐标法

速度分析式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

速度在坐标轴上的投影为动点的各对应坐标对时间的一阶导数，即

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y},\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}$$

由此可以求得速度的大小和方向余弦。

加速度分析式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

加速度在坐标轴的投影为动点的速度在相应坐标轴上的投影对时间的一阶导数，或动点的各对应坐标对时间的二阶导数，即

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

由此可以得到加速度的大小和方向余弦。

3）自然法

速度在切线轴上的投影等于弧坐标对时间的一阶导数，即

$$v_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

加速度沿自然坐标轴的分析式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

加速度在切线、主法线和副法线上的投影分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\qquad a_n=\frac{v^2}{\rho}\qquad a_b=0$$

全加速度的大小和方向可由下式确定

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\qquad \tan\theta=\frac{|a_\tau|}{a_n}$$

切向加速度和法向加速度的物理意义：

切向加速度：$\boldsymbol{a}_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v_\tau}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$，表示点的速度大小随时间的变化率；

法向加速度：$\boldsymbol{a}_n=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$，表示点的速度方向随时间的变化率。

6.1.3 刚体的基本运动

1）刚体的平动

刚体在运动过程中，相对某参考系若其上任意直线始终与它的初始位置平行，则称刚体（相对该参考系）作平行移动，简称为平动。

当刚体作平动时，刚体内各点的轨迹形状完全相同而且互相平行；在每一瞬时，各点具有相同的速度和相同的加速度。因此，对刚体平动的研究可以归结为点的运动的研究。

2）刚体绕定轴转动

刚体运动时，相对于某参考系，刚体内（或其延拓部分）有一条直线保持不动，则称此刚体相对于此参考系作定轴转动，简称为转动。该不动的直线称为转轴。

（1）刚体的整体运动

以 φ 表示刚体的角位移或转角，则转动方程

$\varphi = \varphi(t)$

角速度为 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

角加速度为 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$

（2）转动刚体内任意一点的运动、速度和加速度

在刚体内任取一点，其与转轴间的距离为 R，则该点以 R 为半径作圆周运动，圆心在转轴上。

该点的速度为 $v = R\omega$

切向加速度和法向加速度分别为 $a_\tau = R\alpha$，$a_n = R\omega^2$

因此，该点的全加速度大小和方向分别为

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}, \quad \tan\theta = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

转动刚体内各点的速度和加速度分不规律为：在每一瞬时，转动刚体内各点的速度和加速度大小分别与这些点到转动轴的距离成正比，各点的速度与其转动半径垂直，各点的加速度与各点转动半径之间的夹角 θ 都相同。

6.2 重点及难点

6.2.1 重点

1）用直角坐标法描述点的运动（运动方程、速度、加速度）。

2）用自然法描述点的平面曲线运动（点沿已知轨迹的运动方程、速度、切向加速度、法向加速度）。

3）刚体的平动及其运动特征。

4）刚体的定轴转动，转动方程、角速度及角加速度。

5）转动刚体内各点的速度及加速度。

6.2.2 难点

1）密切面及自然轴系的概念。

2）正确判别刚体的基本运动形式。

6.3 学习指导

6.3.1 基本要求

1）能用矢量法建立点的运动方程，求解速度和加速度。

2）能熟练应用直角坐标法建立点的运动方程，求轨迹、速度和加速度。

3）能熟练应用自然法求点在平面上作曲线运动时的运动方程、速度和加速度，并正确理解切向加速度和法向加速度的物理意义。

4）明确刚体作基本运动的具体特征，并根据刚体基本运动的特征能正确判断刚体作基本运动的具体形式。

5）能熟练计算基本运动刚体上任一点的运动轨迹、速度和加速度。

6）掌握传动比的概念及其公式的应用。

6.3.2 解题指导

1）用坐标法（直角坐标、自然坐标等）描述点的运动。

点的运动轨迹未知情况下，一般选用直角坐标法；点的运动轨迹已知情况下，一般选用自然法，亦可选用直角坐标法。

建立运动方程的具体步骤如下：

（1）确定研究对象，即确定所要研究的动点或刚体上一点。

（2）根据所选用的方法，选择对应的坐标系，并要明确坐标系是固定在什么物体上。

（3）确定点的运动的开始位置，然后将动点放在任意位置，用某一参量表示点的位置，所选参量应与时间有关。不能将点放在特殊位置（如初、末位置），因为特定时刻的位置不能代表点的位置随时间变化的函数关系。

（4）代入时间 t 找出坐标与时间 t 的函数关系，就得到动点在空间的几何随时间 t 的变化关系，亦即动点相对于坐标的运动规律——运动方程。

求点的轨迹方程方法如下：

先建立以直角坐标表示的点的运动方程，将方程中的时间 t 消去，得到动点的空间坐标之间的函数关系，就是动点的轨迹方程。

求点的速度、加速度方法如下：

建立运动方程后，根据已知量和需求量，可用数学求导法、矢量合成法则以及法向加速度公式 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ ，求得动点的速度、切向加速度、法向加速度以及全加速度。

2）刚体基本运动的描述

刚体的运动为平动，则刚体的运动可用刚体上某一点的运动来代表，这样，就可以用点的运动求解方法来求刚体的运动。

刚体的运动为定轴转动，常见的解题类型和求解方法如下：

（1）已知刚体的运动规律（包括自行建立的方程），求角速度和角加速度，需用数学求导法则来解决；反之，已知刚体转动的角加速度和初始条件，求刚体转动的角速度或转动方程，可根据数学积分运算求解。

（2）已知刚体的转动规律，角速度或角加速度（包括自行求出的），求刚体上某点的速度和加速度；反过来，已知刚体上某一点的速度或加速度，求刚体转动的角速度或角加速度，可根据公式求解。

3）刚体系统的运动描述方法

首先判明每个刚体是作平动还是定轴转动。再从已知刚体的运动，求与它连接的另一刚体的运动。需根据两个刚体接触点（传递点）的速度或切向加速度相等的原则，依次按照“刚体—传递点—刚体”的程序求解。即从已知的转动刚体的运动，求传递点的速度、加速度，再求另一个转动刚体的运动。

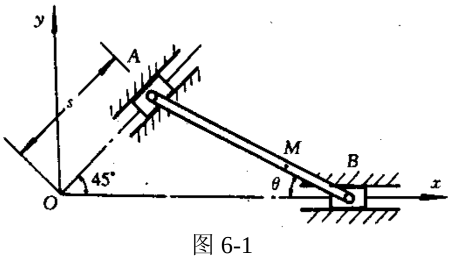


图 6-1

若轮系可直接应用传动比公式。

6.4 典型题解

例 6-1：AB 杆两端与滑块以铰链连接，滑块可在各自的滑道中滑动，如图 6-1 所示。已知杆长 l=60cm，$MB=\dfrac{l}{3}=20\text{cm}$，滑块 A 的运动规律为 $s=60\sqrt{2}\sin 2\pi t$（s 以 cm 计，t 以 s 计）。试求：（1）点 M 的运动方程；（2）当 $t=\dfrac{1}{12}\text{s}$ 时，点 M 的速度。

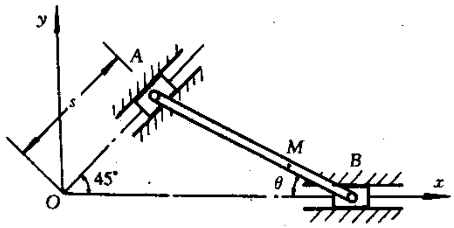


图 6-1

解：为建立 M 点的运动方程，可先写出 M 点的坐标 x、y 与 θ 角的关系，而 θ 与 s 有关系，这样就得出 M 点坐标与时间 t 的关系式，即运动方程。

（1）M 点的坐标

$$x=s\sin 45^\circ+\overline{AM}\cos\theta=60\sin 2\pi t+40\cos\theta$$

$$y=\overline{MB}\sin\theta=20\sin\theta$$

由△OAB 得

$$\sin\theta=\frac{s}{\overline{AB}}\sin 45^\circ=\sin 2\pi t\,,\quad \theta=2\pi t$$

得 M 点的运动方程为

$$x=60\sin 2\pi t+40\cos 2\pi t$$

$$y=20\sin 2\pi t$$

（2）M 点的速度在 x，y 轴上的投影为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=120\pi\cos 2\pi t-80\pi\sin 2\pi t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=40\pi\cos 2\pi t$$

当 $t=\dfrac{1}{12}\text{s}$ 时，$v_x=120\pi\cos\dfrac{\pi}{6}-80\pi\sin\dfrac{\pi}{6}=200.4\text{cm/s}$

$$v_y=40\pi\cos\frac{\pi}{6}=108.7\text{cm/s}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=228\text{cm/s}$$

$$\cos\varphi=\frac{v_x}{v}=0.8789\,,\quad \varphi=28.48^\circ$$

小结：点的运动方程是建立点的坐标与时间的关系，有时需要利用中间变量，本题的 θ 角就是起到这样的作用。

例 6-2：机构如图 6-2（a）所示。曲柄 O_1A 绕 O_1 轴转动，通过固连于连杆 AB 上的齿轮 2 带动齿轮 1 绕 C 轴转动。已知：O_1A 的角速度ω 为常量，$O_1A=O_2B=2r$，且 $O_1A\,//\,O_2B$。两齿轮半径均为 r。试求齿轮 2 和齿轮 1 分别在接触点 P 的速度和加速度。

解：由结构特点，首先判定 AB 杆（连同齿轮 2）作平动，平动刚体上 A 点的运动就是齿轮 2 上 P 点的运动。然后根据齿轮啮合关系，得到齿轮 1 的运动，进一步可求出 P 点的速度和加速度。

连杆 AB（连同齿轮 2）作平动，因此齿轮 2 上 P 点的速度和加速度分别为

$v_2 = v_A = 2r\omega$
$a_2 = a_A^n = 2r\omega^2$ 方向如图 6-2（b）所示。

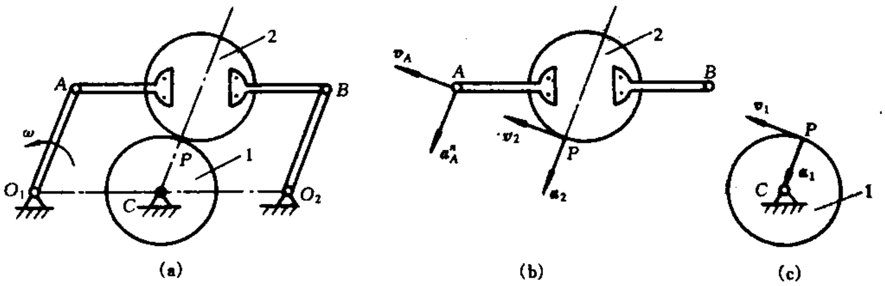


图 6-2

齿轮 1 作匀角速转动，由于啮合点的速度相同，齿轮 1 上 P 点的速度为

$v_1 = v_2 = 2r\omega$ 方向与 v_2 相同

P 点只有法向加速度，即

$a_1 = a_1^n = \dfrac{v_1^2}{r} = 4r\omega^2$ 方向沿 PC 指向轮心 C 点，如图 6-2（c）。

小结：本题判定 AB 杆（连同齿轮 2）作平动是关键，只有掌握平动的定义，才能做出正确的判断。

掌握齿轮啮合传递运动的特点。由于齿轮啮合的接触点无相对滑动，因此两轮在啮合点的速度相同，这样，就从一个刚体的运动求得另一刚体的运动。

齿轮 2 和齿轮 1 分别作平动和定轴转动，因此应按刚体的不同运动特征分别计算接触点 P 的速度和加速度。

第 7 章刚体平面运动

7.1 基本知识点

7.1.1 刚体平面运动方程

1） 刚体运动时，若其上各点至某个固定平面(此固定平面固连于某个坐标系之内)间的距离保持不变，则称此刚体(相对于固定平面所属的坐标系)作平面运动。

2)刚体的平面运动被简化为平面图形(此图形的平面与固定平面相平行)在它自身平面内的运动来研究。

3）为了确定平面图形 S 的位置，在平面 L 上取固定坐标系 Oxy，在平面图形上任取一点 O'， 称为基点，通过该点再取一直线段 $O'A$。显然，图形 S 的位置将随直线段 $O'A$ 的位置确定而定，如图 7-1 所示。

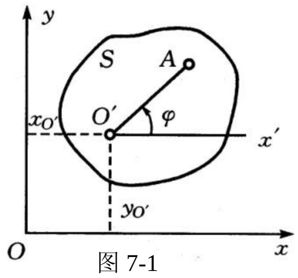


图 7-1

7.1.2 平面运动分解为平动和转动

1）平动坐标系

在平面图形上任选一点 A(称为基点)，以此为原点作平动坐标系 $Ax'y'$ 随基点 A 作平动。

2）平面运动的分解

平动的情况取决于所选的基点，所以平面运动的平动部分与基点选择有关。转动部分的转角是相对于平动坐标系(坐标轴的方向始终保持不变)而言的，选择不同基点时，图形的转角仍然相同，故每一瞬时就有相同的角速度和角加速度，所以平面运动的转动部分与基点选择无关。因此，对平面运动的角速度和角加速度，不必指明是绕哪个基点的转动。

7.1.3 平面图形上各点的速度

1）速度合成法(基点法)

平面图形上任一点的速度等于基点的速度和该点相对于基点(严格讲，应为相对于以基点为原点的平动坐标系)的速度的矢量和。若选点 O' 为基点，则任一点 M 的速度表达式为

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{MO'}$$

2）速度投影定理

图形上任意两点的速度在此两点连线上的投影相等。设图形上 A、B 两点的速度分别为 v_A 和 v_B，则有投影表达式为

$$[\boldsymbol{v}_A]_{AB} = [\boldsymbol{v}_B]_{AB}$$

3）瞬心法

（1）速度瞬心：某一瞬时平面图形上绝对速度等于零的点，称为瞬时速度中心(简称速度心)。一般情况下，在不同瞬时图形有不同的速度瞬心，每一个瞬时只有一个速度瞬心，即速度瞬心具有瞬时性和唯一性。

（2）速度分布状况：平面图形上各点的速度分布，可以看成该瞬时图形绕速度瞬心作瞬时转动时的速度分布，因此瞬时速度中心也称瞬时转动中心。

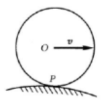
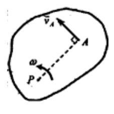
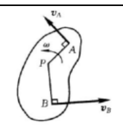
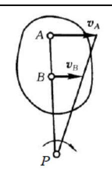
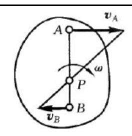
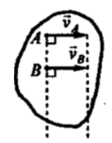
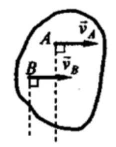
（3）确定速度瞬心的位置

速度瞬心必然位于与点的速度相垂直的直线上。当已知图形上任意两点的速度方向时，则由此两点作速度方向的垂线，两垂线的交点就是速度瞬心。

若图形上两点的速度互相平行，且与两点的连线相垂直，而大小不等，则可以用比例关系确定速度瞬心的位置。

若某时图形上两点的速度相等，图形的速度瞬心在无限远处，则此瞬时，图形上各点的速度相同。这种情况也称为瞬时平动。表 7-1 提供了确定速度瞬心的基本方法。

表 7-1 确定速度瞬心 P 位置的基本方法

<table>
<tr><td rowspan="3">刚体沿固定表面作纯滚动</td><td rowspan="3">已知刚体上一点的速度 v_A 和角速度 ω</td><td rowspan="3">刚体上两点的速度方向不平行</td><td colspan="4">刚体上两点的速度方向平行</td></tr>
<tr><td colspan="2">两点速度与连线垂直，大小不等</td><td colspan="2">两点速度矢量相等</td></tr>
<tr><td>两速度同向</td><td>两速度反向</td><td>与两点连线垂直</td><td>与两点连线不垂直</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
P 为刚体与固定面的接触点</td><td rowspan="2">
$PA=\dfrac{v_A}{\omega}$</td><td rowspan="2">
P 为两点速度垂线的交点</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">P 为两点连线与两点速度矢端连线的交点</td><td colspan="2">P 在无穷远处</td></tr>
<tr><td colspan="5">刚体绕瞬心 P 瞬时转动</td><td colspan="2">刚体瞬时平动</td></tr>
</table>

*7.1.4 平面图形上各点的加速度

平面图形上任一点的加速度，等于基点的加速度与该点相对于基点的法向加速度和切向加速度的矢量和。若选 O' 为基点，则任一点 M 的加速度表达式为

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{a}_{MO'}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{MO'}^{n}$$

平面图形上，某一瞬时绝对加速度等于零的点，称为加速度瞬时中心（简称加速度瞬心）。

注意：速度瞬心与加速度瞬心通常并不是同一点。

7.2 重点及难点

7.2.1 重点

1）明确如何把刚体平面运动分解为平动和转动。

2）求解平面图形上各点的速度。

3）对常见的平面机构能进行运动分析，求解有关速度问题。

7.2.2 难点

理解以基点为原点的平动坐标系。

7.3 学习指导

7.3.1 基本要求

1） 明确刚体平面运动的特征，掌握研究平面运动的方法（运动的合成与分解），能够正确的判断机构中作平面运动的刚体。

2） 能熟练地应用基点法、瞬心法和速度投影定理求平面图形上任一点的速度。

*3） 会应用基点法求平面图形上任一点的加速度。

7.3.2 解题指导

求解平面运动构件上一点的速度（包括构件的角速度）方法如下：

（1）从平面运动机构中的主动件开始，逐个分析机构中各构件的运动形式（平动、转动、平面运动等）。

（2）从平面运动机构中的主动件开始，根据各构件之间的相互约束方式，判断构件之间连接点的速度和加速度（包括大小和方向）。

① 当连个刚体用铰链连接时，其铰链中心处的速度与加速度是相同的。

② 当两物体的接触面有相对滑动时，相互接触的两点的速度与加速度均不相同，但其相对速度沿公切线方向。如曲柄滑块机构中的滑块与固定滑道接触并产生先对滑动，滑块速度只能沿接触点的公切线方向。

③ 当两个物体相互间作纯滚动接触时，它们相互接触的两点的瞬时速度相等，但加速度并不相同。

（3）用基点法求速度、加速度或角速度、角加速度时，通常要确定基点的速度和加速度。然后逐个分析速度或加速度矢量中其他几个要素，如果只有两个未知要素，则问题可解。如果多于两个未知要素，就需要另找补充方程。

（4）用瞬心法求速度的关键是找瞬心，再根据平面图形上某点（连接点或接触点）的已知速度求平面图形的角速度，最后求出平面图形上任何点的速度。但一定要注意，每一个平面图形有它自己的速度瞬心和角速度，不能把几个图形放在一起去找瞬心和角速度。用瞬心法求速度比较简单，尤其是计算平面图形上两个以上点的速度时更为方便。

（5）用速度投影定理求速度时，应已知图形内一点的速度的大小和方向，又知另一点速度的方位来求这一点速度的大小。这种方法多用于机构中的连杆，因为在连杆上与其他构件连接点的速度的大小或方向是容易确定的。可见，用速度投影定理求速度的大小比较方便，但不适于求平面运动刚体的角速度。

7.4 典型题解

例：曲柄连杆机构如图 7-2（a）所示，滑块 B 可在圆槽内滑动。已知:$OA=r$，$AB=l=2\sqrt{3}r$，圆弧半径 $R=2r$。在图示位置 $\varphi=60°$时，曲辆角速度为 ω，角加速度为 α，$OA\perp AB$，且 AB 与槽在 B 点的法线夹角 $\theta=30°$ 试求:该瞬时滑块 B 的速度和 AB 杆的角速度。

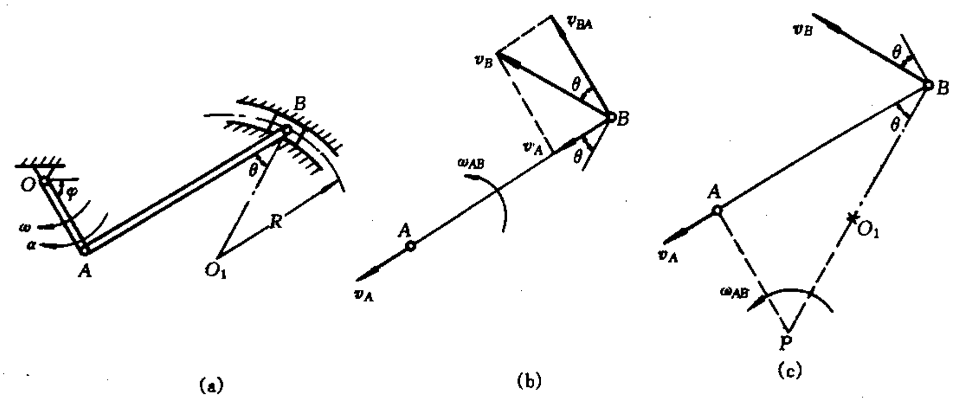


图 7-2

解:滑块 B 与连杆 AB 由铰链连接，对这两个构件而论，连接点的运动情况完全相同，因此由连杆的速度分析，可以求得连杆 AB 的角速度和滑块 B 的速度。

连杆 AB 作平面运动，以下用不同的方法求解。

解法一用速度合成法(基点法)求解。

取 A 为基点，B 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

大小：？ √？

方位：√ √ √

作速度平行四边形，如图 7-2（b）

$$v_B = \frac{v_A}{\sin\theta} = \frac{r\omega}{\sin 30^\circ} = 2r\omega$$ 方向如图 7-2（b）

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\tan\theta} = \frac{r\omega}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}r\omega$$

AB 杆的角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{\sqrt{3}r\omega}{2\sqrt{3}r} = \frac{\omega}{2}$$ 转向逆时针

解法二瞬心法求解。

如图 7-2（c），分别作 A、B 两点速度的垂线得到杆 AB 的速度瞬心 P，可得 AB 杆的角速度为

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{l\tan\theta} = \frac{r\omega}{l\tan 30^\circ} = \frac{\omega}{2}$$ 转向逆时针

滑块 B 的速度

$$v_B = BP\cdot\omega_{AB} = 4r\times\frac{\omega}{2} = 2r\omega$$ 方向如图 7-1（c）

解法三用速度投影法求解。

按照解法一分析的 A 点的速度，以及 B 点的速度的方位，如图 7-2（c），应用速度投影定理

$$v_B\sin\theta = v_A$$

得滑块 B 的速度 $v_B = \dfrac{r\omega}{\sin 30^\circ} = 2r\omega$ 方向如图 7-1（c）

为求杆 AB 的角速度，仍需应用基点法（解法一）或瞬心法（解法二）求解。

小结：

1）比较本题的三种求解方法，可见，基点法是求解平面图形上各点速度的基本方法；瞬心法简明方便；而速度投影定理只能求解点的速度，无法求解平面图形的角速度，因此，只求速度时常用此方法。总之，对于不同问题，应选用一种便于求解的方法。

2）选用某种求解速度的方法，相应地要表达清楚。如用基点法，应写清楚选取哪一点为基点，写出矢量式，同时画出速度矢量图；如用瞬心法，应在图中画清楚速度瞬心位置；如用速度投影定理，应在图中画出速度矢量方向（或速度方位）。只有表达清楚，才可能列式计算求解。

第 8 章点的合成运动

8.1 基本知识点

8.1.1 三个对象与三种运动

点的合成运动研究点相对不同参考系运动之间的关系。

1）三个对象

研究的对象称为动点；

第一个参考系称为固定参考系，简称定系；

第二个参考系称为动参考系，简称动系。

三者必须在三个不同的物体之上。

2）三种运动

绝对运动动点相对于定系的运动；

相对运动动点相对于动系的运动；

牵连运动动系相对于定系的运动。

必须指出：动点的绝对运动和相对运动都属于点的运动，可能是直线运动或曲线运动；而牵连运动则属于刚体的运动，可能是平动、转动或其他较复杂的刚体运动形式。

8.1.2 三种速度和加速度

动点的相对速度（$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$）和相对加速度（$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$）是指动点相对于动系的运动的速度和加速度。

动点的绝对速度（$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$）和绝对加速度（$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$）是指动点相对于定系的运动的速度和加速度。

牵连点是指某瞬时与动点相重合的，在动系上的点。由于动点有相对运动，故不同瞬时有不同的牵连点。

牵连点相对定系的速度、加速度分别称为动点的牵连速度和牵连加速度。

8.1.3 速度合成定理

动点在某瞬时的绝对速度等于其在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

8.1.4 加速度合成定理

1）牵连运动为平动时的加速度合成定理

动系作平动时，动点的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。其表达式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

2）牵连运动为转动时的加速度合成定理

当动系作转动时，加速度合成定理（或称科里奥利定理）为动点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度与科氏加速度三者的矢量和。其表达式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$$

当相对速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 在 ω 的转动平面内时，科氏加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ 可由以下简单方法确定。

大小：$a_{\mathrm{c}}= 2\omega \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

方向：由 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 顺 ω 转过 90°

8.2 重点及难点

8.2.1 重点

1）点的合成运动基本概念，明确三个对象及三种运动。

2）速度合成定理及牵连运动为平动时的加速度合成定理应用。

8.2.2 难点

1）动点，动系的正确选择，正确判定动点的相对运动。

2）牵连点的概念，动点的牵连速度、牵连加速度以及科氏加速度的概念。

8.3 学习指导

8.3.1 基本要求

1）深刻理解三种运动、三种速度和三种加速度的定义，运动的合成与分解，以及运动相对性的概念。

2）对具体问题能够恰当地选择动点、动系和定系，进行运动轨迹、速度和加速度分析。并能正确计算科氏加速度的大小并确定它的方向。

3）熟练地应用速度合成定理、牵连运动为平动时点的加速度合成定理

8.3.2 解题指导

1）根据所给题目如何确定是否需用点的合成运动方法

当动点（或刚体上一点）与另一个运动物体（动参考系）之间有相对运动时，才能将动点的绝对运动分解为随动系的牵连运动和相对于动系的相对运动。反过来，动点的相对运动与牵连运动就合成为动点的绝对运动。这样就构成了点的合成运动问题。

2）动点，动系和定系选取原则

（1）动点，动系和定系必须分别取在三个物体（包括点）上，定系一般固定在不动的物体上。动点与动系需根据分析问题的需要，合理进行选取。但动点和动系不能同时固连在同一个运动刚体上，否则动点与动系之间就不会有相对运动，也就不能构成点的合成运动。

（2）动点相对于动系的相对运动轨迹要明显，简单（比如轨迹是直线、圆或某一确定的曲线），并且动参考系要有明确的运动（比如平动、定轴转动或其他运动等）。

对于有约束联系的问题，例如机构传动或一个点在另一个运动着的物体上运动。对于机构传动，动点多选在机构的主动件与从动件的联接点和接触点，且一旦选定某构件上一点为动点时，则动系必须固结在另一个构件上；对于一个点在另一个运动着的物体上运动这类问题，其特点是点的相对轨迹已知，动点就选为运动的点，动系固结在运动的物体上。

3）进行运动分析

确定了动点、动系和定系后，首先要明确牵连运动的形式（平动、转动或其他运动）。然后分析动点的绝对运动轨迹、相对运动轨迹。要明确各种轨迹是直线还是曲线，若轨迹是曲线时，点的运动加速度一般就有切向加速度和法向加速度。

4）点的速度合成定理

无论牵连运动为何种运动，速度合成定理普遍适用。解题时应先分析三种速度的大小和方向，明确哪些是未知的，并画出速度矢量图，一般只要有两个未知量，就可以根据速度矢量合成公式用几何法或投影法求解。用几何法作速度平行四边形时，绝对速度矢量一定沿平行四边形的对角线。用投影法求解时，一定是将速度矢量合成公式等号两端的各速度矢量分别向同一投影轴进行投影。

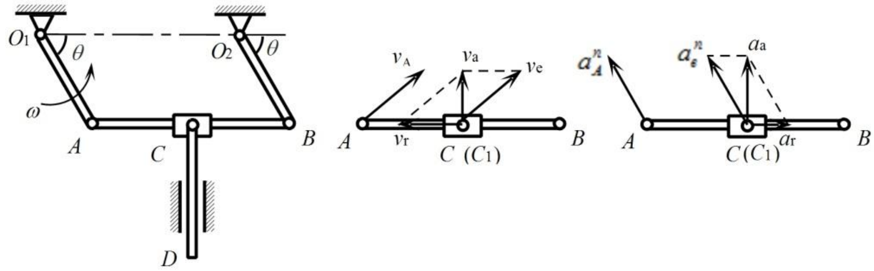
5）点的加速度合成定理

首先要明确牵连运动是平动还是其他运动。两者区分在于牵连运动为平动时，点的加速度合成定理中不含科氏加速度。

若动点的相对轨迹与绝对轨迹为曲线，牵连运动为曲线平动时，则加速度合成定理中的各项加速度都有可能分为切向加速度和法向加速度两项。为此，加速度合成定理一般用其矢量合成公式的投影式进行求解，注意一定是将加速度矢量合成公式等号两端的各加速度分别向同一投影轴进行投影。

8.4 典型题解

例：铰接四边形机构如图 8-1（a）所示。$O_1A=O_2B=r=10$cm，且 $O_1O_2=AB$。当曲柄 O_1A 以匀角速度 ω=2rad/s 绕 O_1 轴转动时，通过套在 AB 杆上的套筒 C 带动 CD 杆运动。试求图示位置 θ=60° 时，CD 杆的速度及加速度。



（a）（b）（c）

图 8-1

解法一套筒 C 与 AB 杆的连接属于滑块滑道类型，而 AB 杆为平行四边形机构中的连杆，作平动。由已知条件，AB 杆在图示瞬时的平动速度和加速应等于 A 点的速度和加速度。因此，对套筒 C 用点的合成运动分析便于求解。

动点：套筒上 C 点

动系：固连于 AB 杆

1）运动分析

绝对运动：套筒 C 沿铅垂线 CD 的直线运动；

相对运动：套筒 C 沿 AB 杆的直线运动；

牵连运动：平动

2）速度分析

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

大小：？ √ ？

方位：√ √ √

牵连速度 $v_e=v_A=r\omega=20\ \mathrm{cm/s}$

作速度平行四边形，如图 8-1（b），得

$v_{\mathrm{a}}=v_e\cos\theta=10\ \mathrm{cm/s}$

这就是 CD 杆平动的速度，方向铅垂向上。

3）加速度分析

按运动分析，平动刚体 AB 上 C_1 点的加速度有切向和法向加速度，因为 $a_A^\tau = 0$，所以 $a_e^\tau = 0$。

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^n + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

大小：？ √ ？

方位：√ √ √

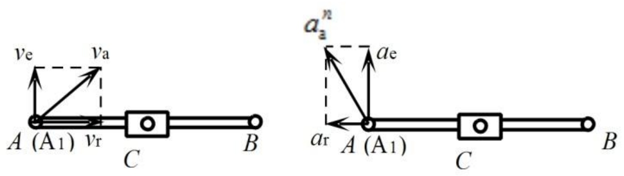
$a_{\mathrm{e}}^n = a_A^n = r\omega^2 = 40\ \mathrm{cm/s^2}$

作加速度平行四边形如图 8-1（c），得

$a_a = a_e \sin 60^\circ = 34.6\ \mathrm{cm/s^2}$

这就是 CD 杆平动的加速度，方向铅垂向上。

解法二由结构特点，AB 杆相对于 CD 杆是沿套筒轴线作平动，即 A 铰链相对于 CD 杆作直线运动。A 点的速度和加速度由已知条件可得。因此，对 A 点用点的合成运动分析，同样可解本题。



（a）（b）

图 8-2

动点：A 点

动系：固连于 CD 杆

1）运动分析

绝对运动：以 O_1 为圆心，O_1A 为半径的圆周运动；

相对运动：沿 AB 的直线运动；

牵连运动：平动，各点的轨迹沿铅垂的直线。

2）速度分析

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

大小：√ ？ ？

方位：√ √ √

绝对速度为 $v_{\mathrm{a}} = v_A = r\omega = 20\ \mathrm{cm/s}$

作速度平行四边形，如图 8-2（a），得

$v_e = v_a \cos\theta = 10\ \mathrm{cm/s}$

这就是 CD 杆平动的速度，方向铅垂向上。

3）加速度分析

动点的绝对加速度只有法向分量

$a_a^n = r\omega^2 = 40\ \mathrm{cm/s^2}$ 方向如 8-2（b）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{n}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

大小：√ ？ ？

方位：√ √ √

作加速度平行四边形如图 8-2（b），得

$$a_{\mathrm{e}}=a_{\mathrm{a}}^{n}\sin\theta=34.6\ \mathrm{cm/s^2}$$

这就是 CD 杆平动的加速度，方向铅垂向上。

小结：

通过本题分析可见，适当选取动点和动系，是应用点的合成运动方法解题的关键，选取合适，可以方便地求解。

动系固连于 AB 杆时，注意牵连运动是平动。AB 杆上各点的运动情况与 A 点完全相同，各点轨迹为圆周，该瞬时各点有相同的速度和加速度。因此，牵连点 C_1 点的速度和加速度完全可由 A 点得出。

本题易犯的错误是：

①将 AB 杆的运动误认为作转动，这是对平动的判定标准掌握不清楚引起的。

②取套筒 C 点为动点，动系取作平行四边形机构 O_1O_2BA，该机构是由四个杆组成的，各杆运动不同，牵连运动将无法分析。因此，动系只能固连于一个运动物体。

③取套筒 C 为动点，动系固连于 O_1A 杆。这样，动系的牵连运动是绕 O_1 轴的转动，动点的相对运动是未确定的曲线运动，未知量多，无法继续求解。如果误认为动点的相对运动是沿 AB 的直线运动，这种判断也是错误的。

第 9 章质点运动微分方程

9.1 基本知识点

9.1.1 质点动力学基本方程

若质点质量为 m，作用于质点的力组成汇交力系，设其合力为 F，质点相对惯性参考系的加速度为 a，由牛顿第二定律，得到质点动力学基本方程 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$，该定理为整个动力学的基础理论。

9.1.2 质点运动微分方程

1）矢量形式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

2）直角坐标形式

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z \end{cases}$$

3）自然坐标形式

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}=F_n \\ 0=F_b \end{cases}$$

9.1.3 振动的基本概念

1）自由振动振动体受初始扰动，仅在恢复力作用下产生的振动称为自由振动。

2）阻尼真实的振动系统中总是存在着各种阻碍运动的力，这些与系统运动有关的阻力统称为阻尼。

3）受迫振动系统受到持续的干扰作用下产生的振动称为受迫振动。

4）固有频率的计算方法：静变形发和等效刚度法。

9.2 重点及难点

9.2.1 重点

1）建立质点运动微分方程。

2）质点动力学第二类基本问题的解法。

3）自由振动固有频率和求固有频率最常用的方法。

4）受迫振动的幅频曲线和共振现象。

9.2.2 难点

质点动力学第二类基本问题的求解。

9.3 学习指导

9.3.1 基本要求

1）深刻理解力和加速度的关系，能正确建立质点的运动微分方程。掌握质点动力学第一类问题（已知点的运动规律，求作用于质点上的力）的解法。

2）掌握动力学第二类问题（已知作用于质点上的力，求质点的运动规律）的一般解法，特别是当作用力分别为恒力、时间函数、位置函数、和速度函数时，质点直线运动微分方程的积分求解方法。对初始条件的力学意义及其在确定质点运动中的作用有清晰的认识。

3）能够建立单自由度系统振动（自由振动、阻尼振动、强迫振动）微分方程，并了解相应的振动特性。理解恢复力、阻尼力和干扰力的概念。

4）深刻理解自由振动的固有频率（或周期）、振幅、初相位角的概念。会应用各种方法求固有频率。

5）了解阻尼对自由振动的影响。

6）深刻理解受迫振动的干扰力、幅频曲线、共振和放大系数的概念。

7）懂得如何利用振动现象，以及消振和隔振的原理与方法。

9.3.2 解题步骤

1）质点动力学两类基本问题的解题步骤如下：

（1）选取研究对象。一般应选联系已知量和待求量的质点为研究对象。

（2）受力分析（包括主动力和约束反力），画受力图。

（3）运动分析。第一类问题要计算质点的加速度，并在质点上画出加速度矢量。第二类基本问题要确定质点运动的初始条件。

（4）建立运动微分方程。根据未知力和运动情况，选择恰当的投影轴，写出质点微分方程的投影式。因为以导数形式表示的运动特征量均为代数量，故$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$等，在代入微分方程时均设为正值。

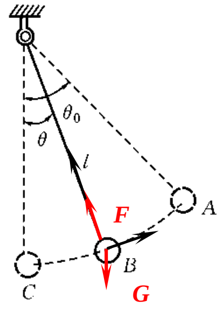
（5）解方程，求出未知量。第二类基本问题要注意微分方程的积分方法和初始条件。有些问题求得解后，需要进行讨论。

2）求系统固有频率的方法：

建立标准形式的常系数线性微分方程，其未知函数前边的系数就是固有频率的平方；已知弹簧刚度系数，或计算出的等效弹簧刚度系数，或知道仅在重力作用下的弹簧静变形，可直接套用公式$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$或$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$，求解系统的固有频率。

9.4 典型题解

例：单摆 M 的摆锤重 W,绳长 l,悬于固定点 O,绳的质量不计。设开始时绳与铅垂线成偏角φ_0≤π/2 ,并被无初速释放，求绳中拉力的最大值。



解:本题目属于动力学第一类问题。

研究对象：摆锤

受力分析：其上作用有重力 G，绳拉力 F。如图 9-1

运动分析：圆周运动。

任意瞬时 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{l}\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2} = \boldsymbol{l}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{l}(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}})^2 = \boldsymbol{l}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2$

自然形式的运动微分方程图 9-1

$$\begin{cases} \boldsymbol{ma}_{\mathrm{t}} = \dfrac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{l}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = -\boldsymbol{W}\sin\boldsymbol{\varphi} & (1) \\ \boldsymbol{ma}_{\mathrm{n}} = \dfrac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{l}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = \boldsymbol{F}_{\mathrm{T}} - \boldsymbol{W}\cos\boldsymbol{\varphi} & (2) \end{cases}$$

分离变量

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}$$

则式(1)化成 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}} = -\dfrac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\varphi}$ (3)

从而得 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = \dfrac{2\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}(\cos\boldsymbol{\varphi} - \cos\boldsymbol{\varphi}_0)$ (4)

(4)代入(2)，得绳拉力

$F_N = (3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\,W$

当摆球 M 到达最低位置$\varphi = 0$ 时，有最大值。故

$F_{Nmax} = (3 - 2\cos\varphi_0)W$

第 10 章质点系动量定理

10.1 基本知识点

10.1.1 动量

1）质点的动量：质点质量与速度的乘积 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$。

2）质点系的动量：质点系内各质点动量的矢量和 $\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$

质点系的动量等于质心的动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_c$。

质点系的动量等于各部分质心的动量矢量和 $\boldsymbol{p}=\sum m_I\boldsymbol{v}_{IC}$

10.1.2 质心坐标公式

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

其中，m 为质点系总质量。在地球引力场中，质点系的质心与重心重合。

10.1.3 质点系动量定理

微分形式：质点系的动量对时间的一阶导数等于作用于质点系外力的矢量和，即

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\sum \boldsymbol{F}_i^e$$

积分形式：质点系动量的变化等于外力冲量的矢量和，即 $\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum \boldsymbol{I}^e$

通常在具体计算中，常用动量定理的投影式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,p_x}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_x^e\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\,p_y}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_y^e\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\,p_z}{\mathrm{d}\,t}=\sum F_z^e\end{cases}$$

当 $\sum \boldsymbol{F}^e=0$ 时，动量 $\boldsymbol{p}$ 为常矢量，即运动过程中，如果质点系外力矢量和始终为零，则质点系动量保持为常矢量。

当 $\sum F_x^{\ e}=0$ 时，动量 p_x 为常量，即运动过程中，如果质点系外力在 x 轴上的投影的代数和始终为零，则质点系动量在该轴的投影保持为常量。

10.1.4 质心运动定理

质点系的总质量与质心加速度的乘积，等于作用于质点系外力的矢量和，即

$m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}^e$ 质心运动定理在直角坐标轴上的投影为 $\begin{cases} ma_{Cx}=m\ddot{x}_C=\sum F_x^e \\ ma_{Cy}=m\ddot{y}_C=\sum F_y^e \\ ma_{Cz}=m\ddot{z}_C=\sum F_z^e \end{cases}$，在自然坐标

轴上的投影为 $\begin{cases} ma_{C\tau}=m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_\tau^e \\ ma_{Cn}=m\dfrac{v_C^2}{\rho}=\sum F_n^e \\ 0=\sum F_b^e \end{cases}$

当 $\sum \boldsymbol{F}^e=0$ 时，$\boldsymbol{a}_C=0$，$\boldsymbol{v}_C$ 为常矢量，即在质点系运动过程中，若外力矢量和始终为零，则质点系质心速度不变，若质心初速度 $\boldsymbol{v}_{C0}=0$，则质心位置守恒。

当 $\sum F_x^e=0$ 时，$a_{Cx}=0$，v_{Cx} 为常量，若 $v_{Cx0}=0$，则 x_C 为常量，及质心 x 坐标不变。

10.1.5 流体附加动压力

由质点系动量定理推导得到管道中流体附加动压力的计算公式为

$$\boldsymbol{F}''=q_v\rho(\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{v}_a)$$

注意，式中的力及速度均为矢量。

10.2 重点及难点

10.2.1 重点

质点系动量定理及质心运动定理。

10.2.2 难点

求解流体对管道的附加动压力。

10.3 学习指导

10.3.1 基本要求

1）对质点系的质心、动量等概念有清晰的理解，能熟练地计算质点系的质心位置和动量。

2）能熟练地应用动量定理、质心运动定理求解动力学问题。

3）掌握流体对管道附加动压力的及计算公式及其应用。

10.3.2 解题步骤

应用质点动力学基本定理解题的步骤如下：

1） 选取研究对象。根据题意，适当选择与待求量和已知条件有关的质点系为研究对象。

2） 分析受力，画出受力图（其方法与静力学相同）。

3） 分析运动。用运动学的方法来分析质点系的运动，明确已知及未知条件。

4） 选择定理与建立方程。

质点系动力学的基本定理建立了质点系运动量的变化和作用量之间的关系。它所求解的问题大致分为两类基本问题：

（1）已知运动，求力（或力的作用量）。

（2）已知力，求运动。

也有一些综合问题，第一类和第二类基本问题相互交叉在一起，这时要把它分解成两类基本问题，依次求解。

在分析受力和运动以后，先分清是哪类问题，然后选择定理，在建立方程。以导数表示的运动特征量 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$ 等，在列方程时一律设为正值。

5） 解方程。

有些问题在得到解后，还要进一步讨论力学意义。

10.4 典型题解

例：如图 10-1，小平车重量 G_1=2kN，车上有一装着砂子的箱子，重量为 G_2=1kN，小车沿水平轨道以匀速率 v_0=3.5km/h 行驶。今有一重量 G_3=0.5kN 的物体铅垂落入砂箱，求此后小车的速度。

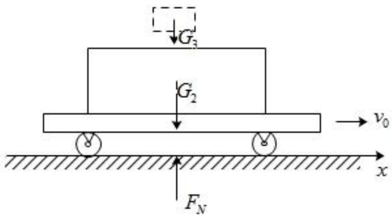


图 10-1

解: 题目是已知系统的初始动量，且水平方向外力为零，故可用动量守恒求末动量，进而求出速度。

研究对象：小车，砂箱和重物所组成的系统

受力分析：系统受到重力 G_1，G_2，G_3 和地面约束反力 F_N 的作用，如图所示，均为铅垂方向的力，$\sum F_x^e = 0$，因此系统水平方向动量守恒。

运动分析：重物落入砂箱前后，系统都作平动。设系统运动稳定后的速度为 v，则系统初始和终了的动量分别为

$$p_{x0} = \frac{G_1 + G_2}{g} v_0, \qquad p_x = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} v$$

由动量守恒 $p_{x0} = p_x$ 得 $\dfrac{G_1 + G_2}{g} v_0 = \dfrac{G_1 + G_2 + G_3}{g} v$

求得小车速度为

$$v = \frac{G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} v_0 = 3\text{km/h}=0.833\text{m/s}$$

第 11 章质点系动量矩定理

11.1 基本知识点

11.1.1 动量矩

1）质点的动量矩：质点对某固定点的动量矩定义为

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是质点到固定点 O 的矢径，$\boldsymbol{v}$ 是质点相对于惯性系的绝对速度。动量矩是定位矢量，应画在 O 点，其单位为 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

2）质点系的动量矩：质点系对某固定点的动量矩为质点系内各质点对该固定点之矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{L}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum\boldsymbol{r}_i\times m\boldsymbol{v}_i$$

注意：质点系对点 $\boldsymbol{O}$ 的动量矩**不等于**质点系对质心 $\boldsymbol{C}$ 的动量矩。

质点系各质点的动量对某轴 z 之矩的代数和为质点系对轴 z 的动量矩，以 L_z 表示，即

$$L_z=\sum M_z(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

参照力矩关系式可得 $\left[\boldsymbol{L}_O\right]_z=L_z$，质点系对某轴的动量矩为代数量。

3）定轴转动刚体对转轴的动量矩等于刚体对转轴的转动惯量与角速度的乘积，即

$$L_z=J_z\omega$$

11.1.2 动量矩定理

1）质点的动量矩定理

质点对某固定点的动量矩对时间的一阶导数，等于作用于质点的力对同一点之矩。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

对固定轴 x 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\boldsymbol{v})=M_x(\boldsymbol{F})$$

2）质点系动量矩定理

质点系对某固定点的动量矩对时间的一阶导数，等于作用在质点系上所有外力对该固定点之矩的矢量和。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}^e)$$

应用时，常取其投影式，若 x、y、z 为过固定点 O 的坐标轴，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_x=\sum M_x(\boldsymbol{F}^e),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_y=\sum M_y(\boldsymbol{F}^e),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z=\sum M_z(\boldsymbol{F}^e)$$

注意：上述动量矩定理的表达式仅对固定点或固定轴适用。对于运动的点或轴，动量矩定理的表达式较为复杂，需另行研究。

3）刚体定轴转动微分方程

定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，等于外力对该轴之矩的代数和。即

$$J_z\alpha=J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\sum M_z(\boldsymbol{F}^e)$$

式中，α 为角速度，φ 为角位移。

4）流体稳定流动时的动量矩方程

$$M_O(\boldsymbol{F})=\rho q_v(v_2r_2\cos\theta_2-v_1r_1\cos\theta_1)$$

式中，$M_O(\boldsymbol{F})$ 为流体对转轴之矩；ρ, q_v 为流体密度和体积流量；r_1，r_2 为转子的外圆和内圆半径；θ_1，θ_2 为入口和出口速度 v_1 和 v_2 与切线的夹角。

11.1.3 转动惯量

1）刚体对转轴 z 的转动惯量为

$$J_z=\sum mr^2$$

转动惯量是刚体绕轴转动惯性的度量，单位为 $\mathrm{kg\cdot m^2}$。

2）平行移轴定理：刚体对于任一轴 z 的转动惯量，等于刚体对于过质心且与该轴平行的轴 z_C 的转动惯量，加上刚体质量与两轴间距平方的乘积。即

$$J_z=J_{zC}+md^2$$

3）回转半径：若刚体对转轴 z 的转动惯量为 J_z，则刚体对 z 轴的回转半径为

$$\rho=\sqrt{\frac{J_z}{m}}$$

11.2 重点及难点

11.2.1 重点

1）质点系的动量矩和转动惯量。

2）质点系的动量矩定理和刚体绕定轴转动微分方程及其应用。

11.2.2 难点

1）利用动量矩定理计算流体对叶轮的转动力矩。

2）相对质心的动量矩定理。刚体平面运动微分方程的应用。

11.3 学习指导

11.3.1 基本要求

1）对动量矩和转动惯量的概念有清晰的理解。熟练计算质点系的动量矩和绕定轴转动刚体（包括均质细长杆、均质细圆环和均质圆盘）的转动惯量。

2）熟练应用质点系的动量矩定理（包括动量矩守恒）和刚体绕定轴转动微分方程求解动力学问题。

3）会应用相对质心的动量矩定理和刚体平面运动微分方程求解动力学问题。

11.3.2 解题指导

本章解题方法步骤与动量定理相同。但需注意以下几点：

1）动量矩定理的矩心只能对固定点或质心；动量矩定理的矩轴只能对固定轴或过质心的轴。

2）刚体转动微分方程的研究对象只能是一个转动刚体。因此对具有多个转动刚体的系统应用转动定理求解，必须将系统拆成几个单轴。

3）列方程时，等号一端的角速度、角加速度和另一端的力矩正向规定要统一，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$是代数量，设为正号。

4）刚体平面运动微分方程的研究对象只能是一个刚体。

11.4 典型题解

例：求图中各机构的动量矩

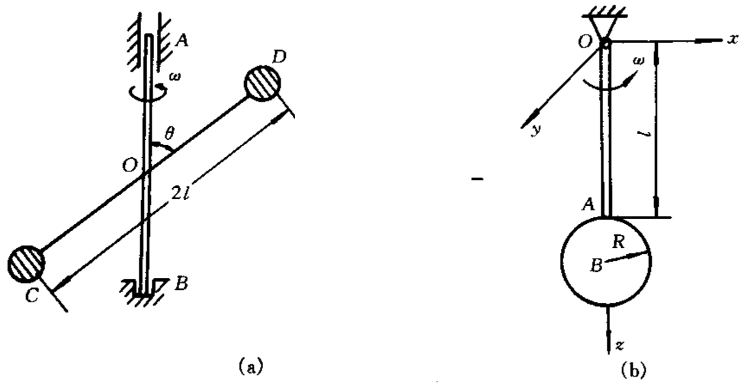


图 11-1

（1）球 C 和 D 质量均为 m，用直杆相连，直杆中点固定在铅垂轴 AB 上，如图 11-1（a）所示。如杆绕轴 AB 以匀角速度 ω 转动，不计 CD 杆的质量，求质点系对转轴的动量矩。

（2）摆由质量为 m_1，长为 l 的摆杆和质量为 m_2，半径为 R 的均质圆盘组成，摆杆和圆盘固结在一起，在铅垂面内绕 O 轴转动，如图 11-1（b）所示。求摆对 O 轴的动量矩。

解：（1）研究对象：球 C 和 D 组成的质点系

质点的速度为$v_C = v_D = l\omega\sin\theta$垂直于纸面

不计 CD 杆的质量。质点系对转轴 AB 的动量矩为

$L_1 = \sum M_{AB}(m\boldsymbol{v}) = 2ml\omega\sin\theta \cdot l\sin\theta = 2ml^2\sin^2\theta$ 转向为逆时针。

质点系质心 O 位于转轴上，v_O=0，质点系动量 p = 0。但质点系对转轴的动量矩并不为零，这说明**质点系的动量矩一般不等于质心动量对轴之矩**，该结论对某点的动量矩也是成立的。

（2）摆作定轴转动。将摆分成摆杆 OA 和盘 B 两部分。

摆杆 OA 对转轴 O 的转动惯量 $J_{O1} = \frac{1}{3}m_1 l^2$

圆盘对转轴 O 的转动惯量可由平行移轴定理得

$$J_{O2} = \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l+R)^2$$

总转动惯量为

$$J_O = J_{O1} + J_{O2} = \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l+R)^2 = \frac{1}{3}(m_1+3m_2)l^2 + \frac{3}{2}m_2R^2 + 2m_2lR$$

摆对转轴 O 的动量矩为

$$L_O = J_O\omega = \left[\frac{1}{3}(m_1+3m_2)l^2 + \frac{3}{2}m_2R^2 + 2m_2lR\right]\omega$$

小结：计算刚体对转轴动量矩的关键，常常是正确计算刚体的转动惯量。本题采用了组合法求转动惯量并使用了平行移轴定理。

第 12 章动能定理

12.1 基本知识点

12.1.1 动能

1）质点的动能：质点质量与其速度乘积的一半，即$T=\frac{1}{2}mv^2$

2）质点系的动能：质点系内所有质点动能的总和，即

$$T=\sum\frac{1}{2}m_\mathrm{i}{v_\mathrm{i}}^2=\frac{1}{2}\sum m_\mathrm{i}{v_\mathrm{i}}^2$$

3）平动刚体的动能：刚体的质量与质心速度平方乘积的一半。

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2$$

4）定轴转动刚体动能：刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半。

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

5）平面运动刚体动能：平面运动刚体的动能,等于它以质心速度作平动时的动能与相对于质心轴转动时的动能之和。

$$T=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}J_P\omega^2$$

其中，J_C 为刚体对过质心转轴的转动惯量，J_P 为刚体对过瞬心转轴的转动惯量。

12.1.2 力的功

1）元功：力 $\boldsymbol{F}$ 在无限小位移 d$\boldsymbol{r}$ 中所作的功。记为$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

其分析表达式为$\delta W=F_x\,\mathrm{d}\,x+F_y\,\mathrm{d}\,y+F_z\,\mathrm{d}\,z$

2）力在有限路程上的功$\boldsymbol{W}=\int_{M_1M_2}\boldsymbol{F}^{\tau}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{M_1M_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

其分析表达为$\boldsymbol{W}=\int_{M_1M_2}(\boldsymbol{F}_x\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}_y\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{F}_z\mathrm{d}\boldsymbol{z})$

3）重力的功：等于质点系的重量与其质心在运动始末位置的高度差的乘积，即

$W=mg(z_{C1}-z_{C2})$

重力的功只与始、末位置有关，与路径无关。

4）弹性力的功：等于弹簧起始位置和终了位置弹簧变形量平方差与弹簧刚性系数乘积的一半，即$W=\frac{1}{2}k\left(\delta_1^2-\delta_2^2\right)$

弹性力的功也与路径无关。

5）定轴转动刚体上作用力的功$W=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_z\left(F\right)\mathrm{d}\varphi$

常力矩的功$W=M_z\left(F\right)\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$

12.1.3 动能定理

1）质点系动能定理的微分形式：$\mathrm{d}T=\sum\delta W$

质点系动能的微分等于作用于质点系各力的元功的代数和

2）积分形式：$T_2-T_1=\sum W_{12}$

质点系的动能在某一路程中的改变量,等于作用于质点系的各力在该路程中的功的代数和

12.1.4 功率与功率方程

1）功率：单位时间力所作的功。$P=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}=F_\tau v=M_z\left(F\right)\omega$

2）功率方程：即质点系动能对时间的一阶导数,等于作用于质点系的所有力的功率的代数和。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}P_i$$

3）机械效率：有用功率与输入功率的比值称为机械效率，机械效率表明机器对输入功率的有效利用程度。

$$\eta=\frac{P_{有用}}{P_{输入}}$$

12.1.5 动力学综合问题

若质点系所受的合外力为零时，即$\sum\boldsymbol{F}^e=0$，可以采用动量守恒或质心运动守恒。

若质点系所受的合外力偶矩为零时，即$\sum\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}^e\right)=0$，可以采用动量矩守恒。

对于单自由度系统，已知作功力时，可采用动能定理分析运动。

对于单自由度系统，要求约束力时，可采用动能定理求运动，动量或动量矩定理求力。

12.2 重点及难点

12.2.1 重点

1）质点系动能及刚体动能的计算

2）力的功的计算

3）动能定理及其应用

12.2.1 难点

动力学综合问题的分析，普遍定理的综合应用。

12.3 学习指导

12.3.1 基本要求

1）对功和功率的概念有清晰的理解。能熟练地计算重力、弹性力和力矩的功。

2）能熟练地计算平动刚体、定轴转动刚体和平面运动刚体的动能。

3）熟知何种约束反力的功为零，何种内力的功之和为零。

4）能熟练应用动能定理求解动力学问题。

5）能综合应用动力学基本定理求解动力学综合问题。

12.3.2 解题指导

1）对于具有理想约束的单自由度系统，如果是由于力作用了一段路程而引起运动变化的问题，可考虑用动能定理求解。需注意以下几点：

（1）取系统作为研究对象。

（2）已知力求速度或角速度的问题。应用动能定理的积分形式求解。

（3）已知力求加速度或角加速度问题，有两种解法：一是用动能定理积分形式求一般位置的速度（或角速度），再对速度（或角速度）求导数，得到加速度（或角加速度）；二是用功率方程，即通过对一般位置的动能及功求导，求得加速度（或角加速度）。

2）计算动能时，注意以下几点：

（1）区分刚体作平动、转动或平面运动，按公式计算其动能。

（2）动能公式中的速度是绝对速度，角速度是绝对角速度。

3）计算力的功时，注意以下几点：

（1）不论外力、内力，只要做功都要计算。

（2）功是代数量，各力做功之和要代数相加。

（3）理想约束的约束反力不做功。

4）应用动能定理解题的基本步骤如下：

（1）选取研究对象，确定应用动能定理的过程。

（2）进行受力分析并计算所有力所作的功。

（3）进行运动分析并计算动能。分析研究对象在所选运动过程的始、末两瞬时的运动状态，以及各运动量之间的关系，并标出相应的运动要素，如速度，角速度等。分别计算出始、末两瞬时的动能。

（4）利用动能定理建立动力学方程。因为动能定理是标量方程，只有一个方程，因此，常需借助运动学知识建立各运动量之间的补充关系。

（5）求解方程。

5）基本定理的综合应用

有许多动力学问题，特别是比较复杂的问题，往往不是应用某个定理就能解决的，需要联合应用几个定理求解。在具体问题中，可根据已知量和待求量以及各定理的特点，经过反

复分析和比较确定。而且一个问题可有几种求解方法，所以怎样综合应用动力学基本定理，难以总结出一套方法，只能大致归纳出以下思路：

（1）已知运动求力的问题

①求约束反力。一般可先考虑用动量定理或质心运动定理，对于质心不在转轴的定轴转动刚体和平面运动刚体可考虑用对质心的转动微分方程。

②求流体的动压力或转矩。可考虑用质点系的动量定理或动量矩定理。

（2）已知力求运动的问题。

①求速度（角速度）。可考虑用动能定理（力作用了一段路程）、质心运动（动量）守恒定律，动量矩守恒定律。

②求加速度（角加速度）。对质点系可考虑用动量（或质心运动）定理和动量矩定理。对定轴转动刚体，可考虑用刚体转动微分方程。对平面运动刚体，可考虑用刚体平面运动微分方程。对有一个转轴并带有平动刚体的系统，考虑应用动量矩定理。对有两个或多个转轴的系统，以及由转动刚体和平面运动刚体等组成的复杂系统，可考虑用功率方程。

12.4 典型题解

例：如图所示系统，均质连杆 *AB*，质量为 m_1=4kg，长 l=600mm，均质圆盘质量 m_2=6kg，半径 r=100mm。弹簧刚性系数 k=2N/m，不计套筒 *A* 和弹簧的质量。连杆在图示位置无初速度释放后，*A* 端沿光滑杆落下，圆盘作纯滚动。求：

（1）当杆 *AB* 落到水平位置而接触弹簧时，圆盘机杆 *AB* 的角速度；

（2）弹簧的最大压缩量。

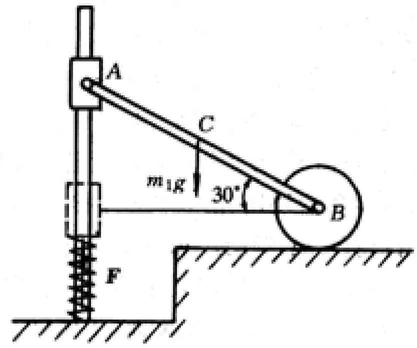


图 12-1

解：研究对象：系统

作功力分析：第一阶段作功的力只有杆 *AB* 的重力

第二阶段作功的力有杆 *AB* 的重力及弹性力 *F*

运动分析：杆 *AB* 作平面运动，轮 *B* 作平面运动

（1）杆 AB 从初始位置到达水平位置，力的功为

$$\sum W_{12} = m_1 g \frac{l}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} m_1 g l$$

杆 AB 和轮 B 都作平面运动，初始瞬时系统静止，动能

$$T_1 = 0$$

杆 AB 到达水平位置时，由运动学知识可知，B 点为杆 AB 的速度瞬心，v_B=0。因此，该瞬时轮 B 的角速度ω_B=0，轮 B 的动能 T_B=0。

杆 AB 质心的速度为$v_C = \dfrac{l}{2}\omega_{AB}$，此时系统的动能为

$$T_2 = T_B + T_{AB} = 0 + \frac{1}{2} J_C \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_C^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \omega_{AB}^2$$

由动能定理$T_2 - T_1 = \sum W_{12}$得

$$\frac{1}{6} m_1 l^2 \omega_{AB}^2 = \frac{1}{4} m_1 g l$$

得出$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{6g}{4l}} = 4.95\text{rad/s}$逆时针转向。

（2）滑块 A 到达弹簧最大压缩量δ 位置时，系统又处于静止，其动能 T_3=0。由水平位置到弹簧最大压缩量位置时，由几何关系得到，杆 AB 质心 C 所走的路程为 δ/2，力的功为

$$\sum W_{23} = m_1 g \frac{\delta}{2} + \frac{k}{2}(0 - \delta^2)$$

由动能定理$T_3 - T_2 = \sum W_{23}$得

$$-\frac{1}{4} m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 g \delta - \frac{1}{2} k \delta^2$$

$$k\delta^2 - m_1 g \delta + \frac{1}{2} m_1 g l = 0$$

代入数据，解方程并取正值，得到 δ=87.1mm

第 13 章达朗贝尔原理

13.1 基本知识点

13.1.1 惯性力

质点惯性力的大小等于质点质量与加速度大小的乘积，其方向与质点的加速度反向相反。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = -m\boldsymbol{a}$$

注意，质点的惯性力并不作用在该质点上，而是作用在使质点产生加速度的其他物体。

13.1.2 质点系的达朗贝尔原理

质点系中作用在每个质点上的主动力、约束力与虚加的惯性力在形式上组成平衡力系，称为质点系的达朗贝尔原理。

$$\boldsymbol{F}_{i} + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

13.1.3 刚体惯性力系的简化结果

1）平动刚体惯性力系的简化

刚体作平动时，惯性力系简化为一个过质心的合力，合力的大小等于刚体质量与加速度乘积，方向与加速度方向相反。即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}C} = -m\boldsymbol{a}_{C}$$

2）定轴转动刚体惯性力系的简化

过转轴 O 的惯性合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IO}} = -m\boldsymbol{a}_{C}$

附加惯性力偶矩 $M_{IO} = J_{O}\alpha$ 转向与 α 转向相反。

13.1.4 刚体的达朗贝尔原理

任一瞬时，虚加的刚体的惯性力系与作用在刚体上的其他外力形式上组成平衡力系，称为刚体的达朗贝尔原理，必然满足静力平衡条件：

$$\begin{cases} \sum \boldsymbol{F}_{i} + \sum \boldsymbol{F}_{Ni} + \sum \boldsymbol{F}_{Ii} = 0 \\ \sum \boldsymbol{M}_{O}(\boldsymbol{F}_{i}) + \sum \boldsymbol{M}_{O}(\boldsymbol{F}_{Ni}) + \sum \boldsymbol{M}_{O}(\boldsymbol{F}_{Ii}) = 0 \end{cases}$$

13.1.5 转子的静平衡与动平衡

静平衡——为消除转动构件的离心惯性力，应保证转子的质心（重心）在转轴上，称为转子的静平衡。

动平衡——对于轴向长度较大的转子，即使其重心在转轴上，也可能存在着惯性力偶，若重心不在转轴上，则既有不平衡的惯性力，也有不平衡的惯性力偶。这种包含惯性力偶的平衡问题，属于动平衡问题。

13.2 重点及难点

13.2.1 重点

1）惯性力的概念。

2）刚体作平动，定轴转动时惯性力系的简化结果。

3）应用达朗贝尔原理求解动力学问题。

13.2.2 难点

1）惯性力系的简化。

2）达朗贝尔原理的应用。

13.3 学习指导

13.3.1 基本要求

1）对惯性力的概念有清晰的理解。

2）掌握质点系惯性力简化的方法，能正确计算刚体平动、定轴转动时的惯性力主矢和主矩。

3）能熟练应用达朗贝尔原理求解动力学问题。

4）会计算定轴转动刚体对轴承的附加动压力。

5）了解静平衡与动动平衡等概念。

13.3.2 解题指导

达朗贝尔原理多用于已知力求运动（包括用运动学方法求出来的运动），求约束力，其解题步骤如下：

1）确定研究对象。

根据问题的已知条件和待求量，选择研究对象。

选取研究对象总的原则与静力学中选取研究对象相同。对于刚体系统动力学问题，可选每个物体为研究对象，也可选定系统的一部分（包括一个以上的刚体）或整个系统为研究对象。如何确定选取研究对象的先后次序，要根据题给条件和所要解决的问题，经过分析制定出解题方案。总之，选取研究对象的方法是比较灵活的。

2）分析受力。

按静力学分析受力的方法，在研究对象简图上，画出作用在研究对象上所有主动力和约束反力。

3）虚加惯性力。

虚加惯性力（包括惯性力偶）是应用达朗贝尔原理解题的关键，而正确分析每个物体的运动又是虚加惯性力的关键。

把每个刚体质心加速度的方向和刚体角加速度的转向画在对应的刚体上，再应用刚体惯性力系已经简化好的结果，把这些惯性力（包括惯性力偶）虚加在研究对象的相应位置，并注意惯性力的方向（包括惯性力偶的转向）与刚体质心加速度（角加速度转向）相反。

4）列“平衡方程”

按静力学平衡方程的方法列出相应的形式上的“平衡方程”。

特别提醒正确虚加在研究对象上的惯性力（包括惯性力偶）在列“平衡方程”时等同于主动力和约束反力。

由于虚加惯性力时已将惯性力的方向（包括惯性力偶的转向）沿刚体质心加速度（角加速度)的反向画出，故在具体列方程时就按虚加惯性力后的受力图图示方向进行投影或取矩。在计算时，用 $F_I= ma_C$，$M_{IO}= J_O\alpha$ 代入方程，切记不要再用 $F_I= - ma_C$，$M_{IO}= - J_O\alpha$ 代入方程。

5）解方程求出所需求的未知数，并作适当的讨论与分析。

13.4 典型题解

例：质量为 m，半径为 R 的均质圆盘可绕垂直于盘面的水平轴 O 转动，O 轴正好通过圆盘的边缘，如图 13-1（a）所示。圆盘从半径 OC 处于铅垂位置无初速度释放转下，求当圆盘转动，OC 处于水平位置时 O 处的约束力。

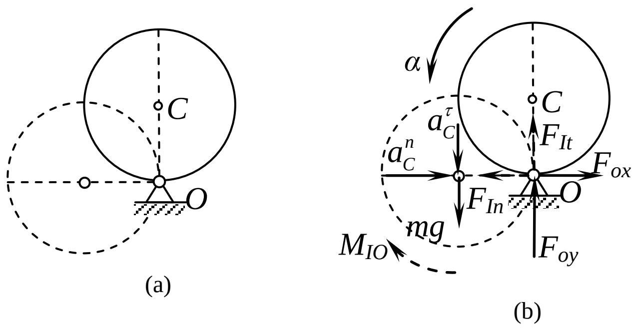


图 13-1

解：研究对象：均质圆盘

受力分析：如图 13-1（b）所示

运动分析：圆盘作定轴转动，圆盘质心的加速度、角加速度的方向如图 13-1（b）所示。

先由动能定理，求出圆盘位于水平位置的瞬时角速度ω

$$T_2 - T_1 = \sum W_{12}$$

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - 0 = mgR$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\omega^2 = mgR$$

得出 $$\omega^2 = \frac{4g}{3R}$$

计算惯性力：$F_{I\tau} = ma_C^\tau = mR\alpha$ $F_{I\tau} = ma_C^n = mR\omega^2$ $M_{IO} = J_O\alpha$

列平衡方程

$$\sum M_O(F) = 0 \quad mgR - M_{IO} = 0 \qquad \text{得出} \quad \alpha = \frac{2g}{3R}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} - F_{In} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} + F_{I\tau} - mg = 0$$

得出 $F_{Ox}=\frac{4}{3}mg \quad F_{Oy}=\frac{1}{3}mg$

第 14 章虚位移原理

14.1 基本知识点

14.1.1 约束及约束方程

限制物体（质点或质点系）位置或速度的条件称为约束。这种限制条件可以用数学方程式来描述，称为约束方程。

几何约束：限制质点或质点系在空间位置的约束。

运动约束：除限制质点或质点系的几何位置外，还限制质点速度的约束。

定常约束：约束条件不随时间变化（即约束方程不显含时间 t）的约束。

非定常约束：约束条件随时间变化（即约束方程显含时间 t）的约束。

双面约束：约束方程为等式的约束称为双面约束（也称为双侧约束）。

单面约束：约束方程为不等式的约束称为单面约束（也称为单侧约束）。

14.1.2 虚位移和虚功

虚位移：质点或质点系（包括刚体）在某瞬时为约束所允许的任何无限小的位移称为虚位移。虚位移可以是线量如 $\delta \boldsymbol{r}$，其投影 δx、δy、δz，也可以是角量，如 $\delta\varphi$。

虚功：力在虚位移所作的元功称为虚功，即 $\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}$。

理想约束：如果在质点系任何虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 上，约束反力 $\boldsymbol{F}_{Ni}$ 所作虚功之和等于零，则称这种约束为理想约束。即 $\delta W = \sum \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$

14.1.3 虚位移原理

如果质点系受到双面、定常、理想约束，则静止的质点系平衡的充分必要条件是：作用于质点系的所有主动力在任何虚位移上的虚功之和等于零。即虚功方程为

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

为便于应用，可将上式写成解析形式

$$\sum (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0$$

14.2 重点及难点

14.2.1 重点

虚位移、理想约束的概念，应用虚位移原理求解物体系统的平衡问题。

14.2.2 难点

虚位移的计算。

14.3 学习指导

14.3.1 基本要求

1）对约束方程、理想约束和虚位移有清晰的概念，并会计算虚位移。

2）能正确运用虚位移原理求解物体系统的平衡问题。

14.3.2 解题指导

对于理想约束系统，由于虚功方程中包含质点系所受的主动力（包括按主动力处理的约束反力），所以利用虚位移原理，能较容易地求出平衡时所受的主动力（包括力偶）之间的关系。这是用虚位移原理求解质点系平衡问题的主要优点。

1）用虚位移原理求解质点系平衡问题的类型。

（1）求系统在某已知位置处于平衡时所受主动力之间的关系。

（2）求系统在已知主动力作用下在某已知位置处于平衡时的约束反力（包括内力）。

（3）求系统在已知主动力作用下处于平衡时的具体平衡位置。

2）解题步骤

（1）弄清题意，确定所研究的系统，分析质点系的自由度，检查系统的约束情况，判断是否为理想约束。

（2）对系统进行受力分析。

用虚位移原理求解质点系的平衡问题，其实质是利用动力学虚功的概念，求静力学问题。如果是理想约束，只需画出质点系所受主动力（包括虚位移中做功的内力），不需画出质点系理想约束的约束反力和其他不做功的力；如果要求约束反力，则需解除约束，代之以约束反力，此时将约束反力按主动力处理。

（3）给出主动力（包括力偶）作用处各相应的虚位移，根据虚位移原理，写出虚功方程。

（4）建立虚位移之间的关系

用虚位移原理解题的关键之一是找出质点系中各力作用处相应的虚位移之间的关系，然后将其代入虚功方程，并把它作为公因子提出，利用虚位移是可以任意选择的性质，从方程中消去虚位移，就得出所需求的问题。

14.4 典型题解

例：椭圆规如图 14-1 所示。滑块 A 和 B 与长为 l 的杆 AB 铰接，忽略摩擦和给物体自重，求机构在图示位置平衡时主动力 F_1 和 F_2 之间的关系。

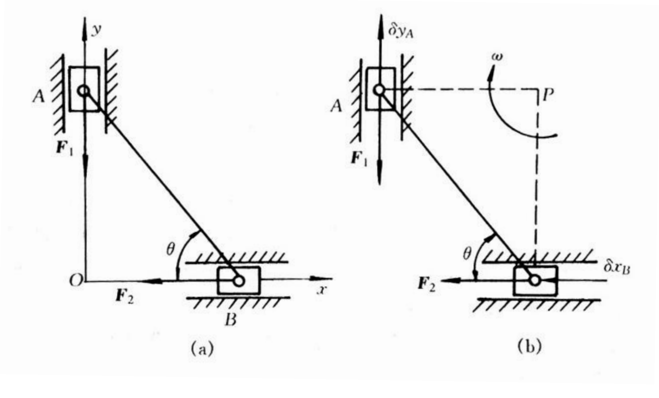


图 14-1

研究对象：滑块滑块 A、B 与杆 AB 所组成的系统为研究对象。

受力分析：作用于系统的主动力为 F_1 和 F_2

建立各虚位移之间关系，取坐标如图 14-1（a）所示。因滑块 A、B 均作直线运动，有

$$y_A = l\sin\theta\text{，}\quad \delta y_A = l\cos\theta\delta\theta$$

$$x_B = l\cos\theta\text{，}\quad \delta x_B = -l\sin\theta\delta\theta$$

建立虚功方程：由虚功方程 $\sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0$，得

$$-F_1\delta y_A - F_2\delta x_B = 0$$

即 $-F_1 l\cos\theta\delta\theta - F_2(-l\sin\theta\delta\theta) = 0$

由于 $\delta\theta \neq 0$，得到在图示位置平衡时 F_1 和 F_2 的关系为

$$\frac{F_1}{F_2} = \cot\theta$$

也可以通过约束方程建立虚位移 δy_A、δx_B 之间的关系。在本题中，约束方程为

$$y_A^2 + x_B^2 = l^2$$

对约束方程变分 $2y_A\delta y_A + 2x_B\delta x_B = 0$ 得

$$\frac{\delta y_A}{\delta x_B} = -\frac{x_B}{y_A} = \cot\theta$$

小结：当建立各虚位移关系时，只需把系统放在一般位置上，建立固定坐标系，求各主动力作用点的坐标，然后变分就得到了虚位移之间的关系，不需画出虚位移图。注意，力的投影和坐标的变分都是代数量，代入公式时要连同正负号一起代入。当然也可取代数量的绝对值，代入虚功方程时再考虑做功的正负。